



PLUSBOEK
OP WEG NAAR
WISKUNDE

HET GROTE REKENBOEK

HET GROTE REKENBOEK

Plusboek

op weg naar wiskunde

Henk Pfaltzgraff

Scala leuker leren
Groningen

Ontwerp Hans Bastiaan Busking *bnó*, Groningen

Opmaak Bartina Morriën, Groningen

0 1 2 3 4 5 / 18 17 16 15 14 13

© 2013 Scala leuker leren bv, Groningen, The Netherlands

www.scalaleukerleren.nl

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.

ISBN 978 9077990 89 6

NUR 192

Voorwoord

Op Weg naar Wiskunde is een oefenboek dat een brug slaat tussen rekenen op de basisschool en wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het boek biedt een kennismaking met algebra, meetkunde en kansberekening en is bedoeld voor iedereen die klaar is met de stof voor de basisschool of meer uitdaging aan kan. Het is daarom geschikt voor achtstegroepers voor de periode na de Cito-toets of als differentiatiemateriaal. Ook is het een handig oefenboek voor brugklassers die basisstof willen oefenen of naslaan.

De stof wordt aangeboden op dezelfde manier als in *Het Grote Rekenboek – Oefenboek* en sluit aan op de bovenbouwmethode *Het Grote rekenboek 6, 7 en 8*. Maar dit *Plusboek – Op Weg Naar Wiskunde* staat op zichzelf en kan gebruikt worden naast of in vervolg op welke andere methode dan ook.

Je maakt kennis met nieuwe onderwerpen die je in de brugklas krijgt. Je gaat oefenen met negatieve getallen, machten en wortels en moet dan alle rekentechnieken van de basisschool goed beheersen. De regels voor bewerkingen en hun volgorde zijn heel belangrijk voor alles wat later komt, net als de rekenregels voor breuken. Daarom moet je met hoofdstuk 1 *Getallen en bewerkingen* beginnen en de volgorde in het boek aanhouden. Elke volgende paragraaf gaat ervan uit dat je wat in de vorige paragraaf nieuw was, begrijpt en kunt toepassen. In hoofdstuk 2 *Verbanden* ga je echt aan de slag met wiskunde. Je leert rekenen met letters in plaats van cijfers en wat verbanden zijn. Je leert vergelijkingen op te lossen en grafieken te maken in een assenstelsel. Hoofdstuk 3 *Meetkunde* gaat over hoeken, driehoeken en cirkels. Je hebt er de kennis van hoofdstuk 1 en 2 voor nodig, onder andere omdat je bij deze onderwerpen ook met vergelijkingen werkt. Voor berekeningen met driehoeken en cirkels leer je een belangrijke formule: de Stelling van Pythagoras. Je leert de omtrek en oppervlakte van cirkels berekenen. Bovendien maak je kennis met verschillende perspectieven bij projecties van ruimtelijke figuren in het platte vlak. In het laatste hoofdstuk *Kansberekening* leer je uit te rekenen hoe groot een kans op een bepaalde gebeurtenis is. Dit laatste hoofdstuk is een apart onderwerp, dat enigszins los staat van de andere hoofdstukken.

Elk hoofdstuk opent met een overzicht van de belangrijkste deelonderwerpen, samengevat in een aantal vensters. De vensters hebben een naslagfunctie voor wie snel een formule, regel of definitie terug wil zoeken. Elk deelonderwerp wordt eerst uitgelegd en er wordt een rekenvoorbeeld uitgewerkt. Achterin staan alle antwoorden, met de uitleg hoe je tot het juiste antwoord komt. Daarom is *Het Grote Rekenboek Plusboek – Op Weg Naar Wiskunde* geschikt om zelfstandig mee te werken, zonder hulp van leerkracht of ouder.

Groningen, januari 2013
de uitgever

Inhoud



Getallen en Bewerkingen

9

Gehele getallen

12

- delers, producten en kwadraten
- priemgetallen
- voorrangsregels
- GGD
- KGV
- deelbaarheidseigenschappen
- extra – een doodlopende rij?
- toets

Negatieve getallen

19

- tegengestelde
- negatieve getallen optellen
- negatieve getallen aftrekken
- sommen met meer termen
- door elkaar
- negatieve getallen vermenigvuldigen
- producten met meer factoren
- de volgorde van bewerkingen
- negatieve getallen delen
- kettingberekeningen
- door elkaar
- extra – het getal nul
- toets

Breuken

25

- teller en noemer delen door of vermenigvuldigen met hetzelfde getal
- een breuk vermenigvuldigen met een geheel getal
- breuken met elkaar vermenigvuldigen
- breuken door elkaar delen
- gelijknamige breuken optellen en aftrekken
- ongelijknamige breuken optellen en aftrekken
- kruislings werken
- door elkaar
- staartdeling
- extra – repeterende breuken
- toets

Machten

30

- machtsverheffen
- worteltrekken
- voorrangsregels
- gelijke grondtallen
- verschillende grondtallen
- gelijke exponenten
- macht-tot-een-macht
- negatieve exponent
- extra – grote getallen
- toets



2 Verbanden

Verhoudingen

- evenredig
- omgekeerd evenredig
- tijd/hoeveelheid
- tijd/afstand
- extra – door elkaar
- toets

Rechtlijnige verbanden

- grafiek bij evenredigheid
- grafiek bij omgekeerd evenredigheid
- lineaire verbanden
- formules met x en y
- extra – Celsius/Fahrenheit
- toets

Algebra

- letters op de plaats van getallen
- vergelijkingen oplossen: 1 $\times$ dezelfde bewerking links en rechts
- vergelijkingen oplossen: 2 $\times$ dezelfde bewerking links en rechts
- vergelijkingen oplossen: letters en getallen scheiden
- de verdeel eigenschap
- vergelijkingen oplossen: eerst haakjes wegwerken
- een vergelijking opstellen
- een vergelijking met 2 letters opstellen
- extra
- toets

35

37

42

48

Kwadratische verbanden

- kwadraten en wortels
- wortels benaderen
- nauwkeurig en exact
- coördinaten
- parabool
- y -coördinaten bij een parabool uitrekenen
- een minteken voor het kwadraat
- extra
- toets

54



3 Meetkunde

De Stelling van Pythagoras

- som van kwadraten
- de Stelling van Pythagoras
- bewijs voor de stelling
- lengte berekenen
- toepassingen
- extra – piramide
- toets

59

62

Hoeken

- hoeken
- hoeken meten
- Griekse letters voor hoeken
- de som van hoeken in een driehoek en een vierhoek
- scherphoekige, stomphoekige en overstaande hoeken
- F -hoeken en Z -hoeken
- extra
- toets

68

Driehoeken en cirkels 75

- de oppervlakte van een driehoek
- de omtrek van een cirkel
- de oppervlakte van een cirkel
- extra
- toets

Meetkunde in de ruimte 81

- de derde dimensie
- parallelprojectie
- snijden en kruisen
- perspectief
- inhouden berekenen
- extra
- toets



4 Kansberekening

89

- de kans op ...
- kans en oppervlakte
- twee of drie muntjes
- twee dobbelstenen
- de productregel
- de somregel
- trekken zonder teruglegging
- kansspel
- extra – een kansexperiment
- toets

Antwoorden 101

- 1 Getallen en bewerkingen 102
- 2 Verbanden 117
- 3 Meetkunde 137
- 4 Kansberekening 151

**In deze online publicatie is hoofdstuk 3 opgenomen.
Koop dit boek voor de volledige versie.**

De Stelling van Pythagoras

som van kwadraten

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

Een enkele keer is de som (de optelling) van twee (heel soms drie) kwadraten precies weer het kwadraat van een geheel getal.

1

Vul in.

$$6^2 + 8^2 = \dots^2$$

$$5^2 + 12^2 = \dots^2$$

$$15^2 + \dots^2 = 17^2$$

2

Vul in met behulp van de rekenmachine.

$$40^2 + \dots^2 = 41^2$$

$$7^2 + 24^2 = \dots^2$$

$$20^2 + \dots^2 = 29^2$$

3

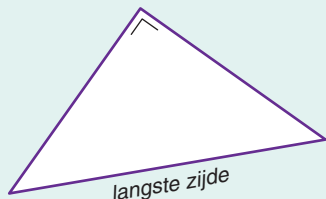
Vul in.

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = \dots^2$$

$$\dots^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2$$

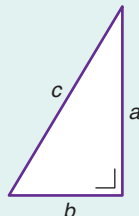
$$4^2 + 4^2 + 7^2 = \dots^2$$

de Stelling van Pythagoras



Als c de langste zijde is in een rechthoekige driehoek en als a en b de andere zijden zijn dan geldt volgens de Stelling van Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Met de Stelling van Pythagoras kun je een zijde van een rechthoekige driehoek uitrekenen.

In een rechthoekige driehoek is de rechte hoek altijd de grootste hoek.

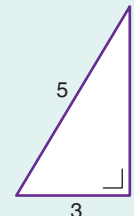
De zijde tegenover de grootste hoek is de langste zijde.

De andere twee zijden heten de rechthoekszijden.

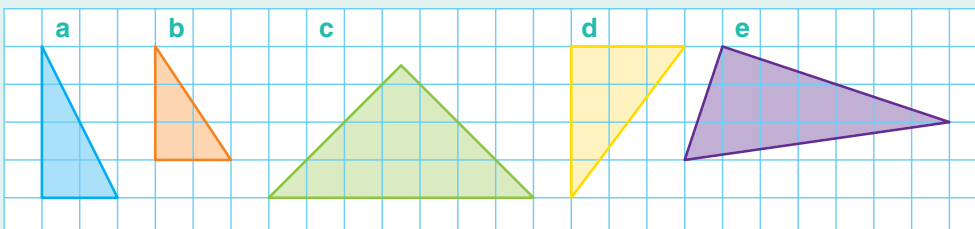
In woorden luidt de Stelling van Pythagoras:

Het kwadraat van de langste zijde is gelijk aan de som van de kwadraten van de andere zijden.

$$4^2 + 3^2 = 5^2 \text{ want } 16 + 9 = 25$$

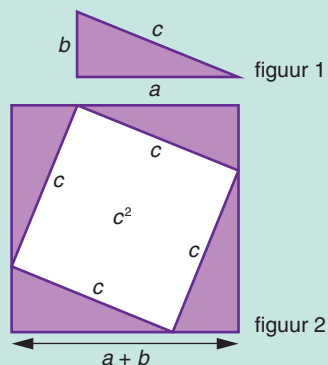


- 4 Teken op ruitjespapier met ruitjes van $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ de driehoeken a, b, c, d en e. Verleng de benen van de hoeken. Meet van alle vijf driehoeken de zijden zo nauwkeurig mogelijk.

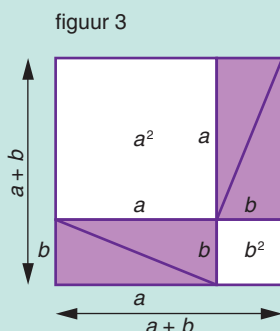


Kwadrateer al je uitkomsten en controleer bij elke driehoek de Stelling van Pythagoras met behulp van de rekenmachine.

bewijs voor de stelling



De oppervlakte van het witte gebied is c^2 .



De oppervlakte van het witte gebied is $a^2 + b^2$.

In de wiskunde moet je de juistheid van elke uitspraak (bewering) die je doet *bewijzen*. Een uitspraak is pas een *stelling* als die is bewezen. Voor de Stelling van Pythagoras zijn in de loop der eeuwen meer dan honderd bewijzen gegeven. Eén van die bewijzen verloopt ongeveer als volgt.

De paarse driehoek in figuur 1 heeft als langste zijde c en als rechthoekszijden a en b . Als je schuift met vier van zulke paarse driehoeken zoals in figuur 2 en 3, zie je dat de totale oppervlakte van wit + paars gelijk is in beide figuren. Dus is de oppervlakte van de twee witte vierkanten in figuur 3 ($a^2 + b^2$) samen gelijk aan de witte oppervlakte in figuur 2 (c^2).

- 5 Neem twee velletjes ruitjespapier met vierkantjes van 1 cm^2 , knip uit het ene velletje vier keer een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 6 cm en 8 cm en geef ze een kleur. Wat is de oppervlakte van zo'n gekleurd driehoekje? Schuif de vier driehoekjes op het andere velletje tegen elkaar op de hierboven beschreven manier. Hoe groot is de oppervlakte van het witte en het gekleurde deel en hoe groot is langste zijde van een driehoekje? Meet het na met een liniaal.

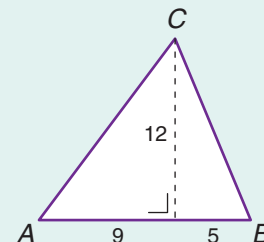
lengte berekenen

- 6 Teken op ruitjespapier met vierkante centimeters in een assenstelsel de punten $P(3, 2)$ en $Q(7, 5)$. Meet (met een liniaal) en bereken (met de Stelling van Pythagoras) de afstand PQ tussen deze punten.

- 8 Teken op ruitjespapier de punten $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ en $C(5, 5)$ en bereken van $\triangle ABC$
- de oppervlakte
 - de omtrek (afronden in twee decimalen)

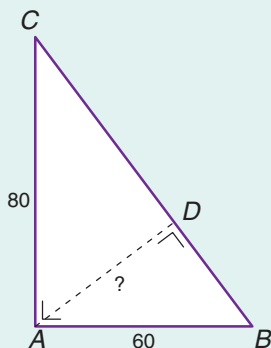
- 7 Teken op ruitjespapier in een assenstelsel de punten $R(-3, 2)$ en $S(1, 7)$. Bereken de afstand RS tussen deze punten. Benader de wortel met een rekenmachine.

- 9 Bereken de oppervlakte en de omtrek van driehoek ABC . Het komt mooi uit, je hoeft geen rekenmachine te gebruiken.



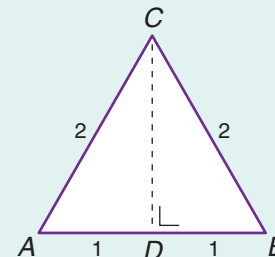
- 10 In deze rechthoekige driehoek kun je de lengte van de hoogtelijn AD uitrekenen via een omweg.

- Bereken eerst de oppervlakte van de driehoek.
- Bereken dan de zijde BC met de Stelling van Pythagoras.
- Schrijf de oppervlakte van driehoek ABC op een andere manier, met BC als basis en AD als hoogte.
- Reken nu AD uit.



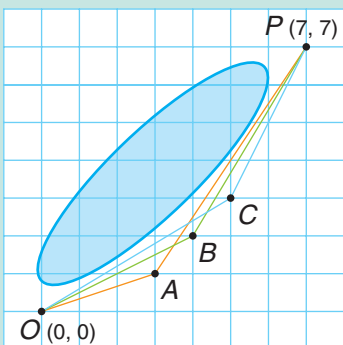
- 11 Van een gelijkzijdige driehoek met een zijde van 2 kun je de oppervlakte berekenen door eerst met de Stelling van Pythagoras de hoogte van de driehoek uit te rekenen.

Geef een exact antwoord (gebruik geen rekenmachine).

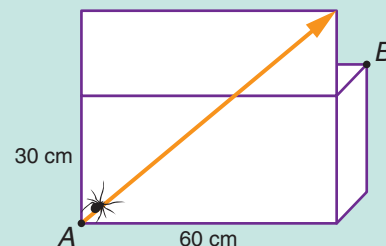
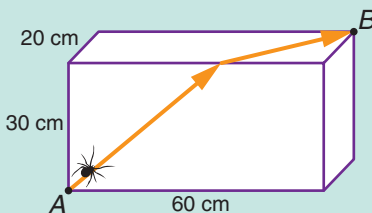


toepassingen

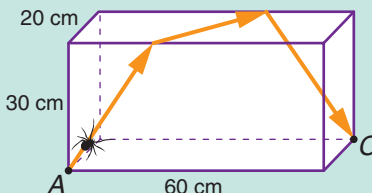
- 12** Je moet in twee stappen van punt $O(0, 0)$ naar punt $P(7, 7)$, langs de vijf, via A of B of C . Bereken met behulp van je rekenmachine welke van die drie routes de kortste is: OAP , OBP of OCP .



- 14** Een kist is 20 bij 30 bij 60 cm. Een spinnetje loopt volgens de kortste route, via de voorkant en het deksel, van A naar B . Bereken de lengte van die kortste route, in cm afgerond met een rekenmachine. Stel je daarbij de doos voor met het deksel voorwaarts omhoog, zoals in de rechtekening.

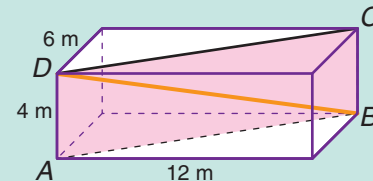
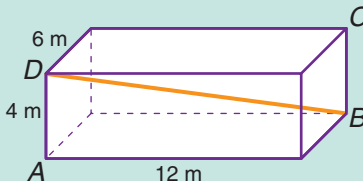


- 15** Nu gaat een spinnetje van A naar C via het voorvlak, het deksel en het achtervlak van de kist. Hoe lang is de kortste route?

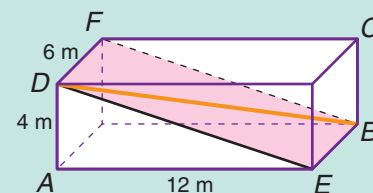


- 13** In de schuur is een touw getekend, strak gespannen tussen twee diagonaal tegenover elkaar liggende hoekpunten B en D . De afmetingen van de schuur zijn 12 bij 4 bij 6 meter.

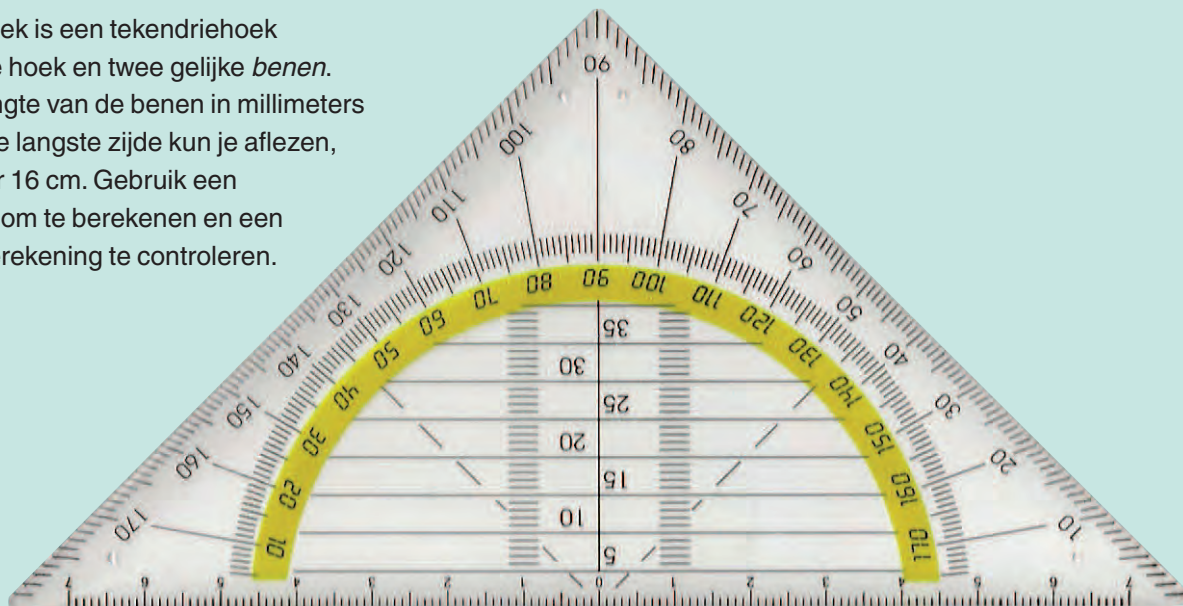
- a** Bereken de lengte BD van dat touw. Kijk in een hulprechthoek, bijvoorbeeld $ABCD$. Hoe lang is AB ?



- b** Kijk nu naar de hulprechthoek $DEBF$. Ga na, of uit de lengte van DB hetzelfde antwoord komt als bij a.

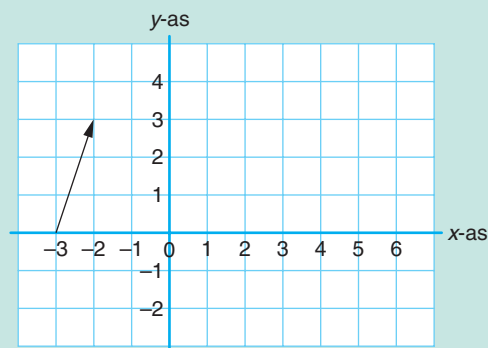


- 16** Een geodriehoek is een tekendriehoek met een rechte hoek en twee gelijke *benen*. Bereken de lengte van de benen in millimeters nauwkeurig. De langste zijde kun je aflezen, die is ongeveer 16 cm. Gebruik een rekenmachine om te berekenen en een liniaal om je berekening te controleren.



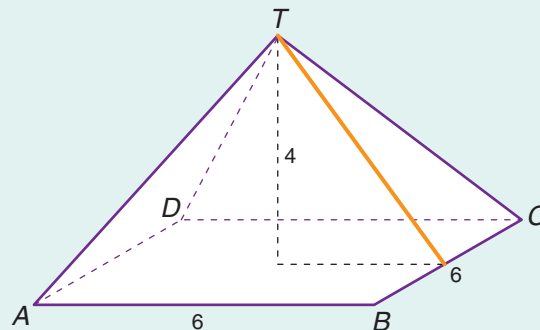
- 17** Een torretje loopt volgens rechte lijnstukjes op ruitjespapier met vierkante centimeters tussen de punten $(-3, 0)$ $(-2, 3)$ $(-1, 4)$ $(2, 5)$ $(5, 4)$ $(6, 3)$ $(7, 0)$ en dan rechtstreeks via $(0, 0)$ terug naar $(-3, 0)$.

- Waarom liggen deze punten op een (halve) cirkel?
- Bereken met behulp van je rekenmachine hoeveel cm de mier gelopen heeft.
Rond je antwoord af op 2 decimalen.
- Hoe groot is de oppervlakte van het omwandelde gebied tussen al deze lijnstukken?



extra - piramide

- 18** $T.ABCD$ is een regelmatige piramide met een hoogte van 4 cm en een vierkant met zijden van 6 cm als grondvlak.
- a** De oppervlakte van de piramide is de totale oppervlakte van de vier opstaande zijvlakken (driehoeken) plus het grondvlak. De hoogte van een zijvlaksdriehoek kun je berekenen met de Stelling van Pythagoras.
- Bereken de oppervlakte van de piramide.
- b** Bereken exact de lengte van ribbe AT .



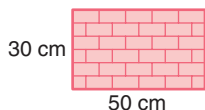
Toets – de Stelling van Pythagoras

Van een huisje zijn de aanzichten gegeven.

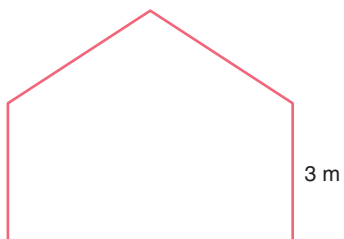
Voor de dakbedekking worden dakplaten van 30 bij 50 cm gebruikt.

Tussen de dakplaten zit een paar mm ruimte voor de voegen.

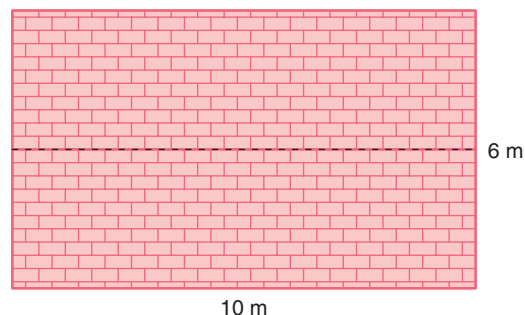
Bereken het aantal benodigde dakplaten.



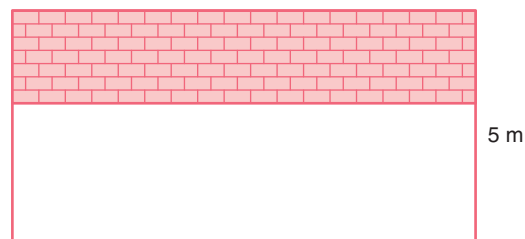
vooraanzicht



bovenaanzicht



zijaanzicht

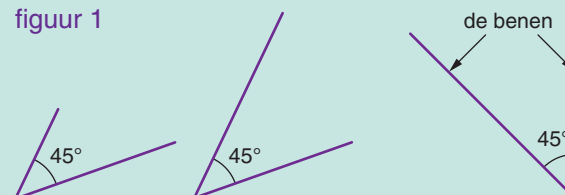


Hoeken

hoeken

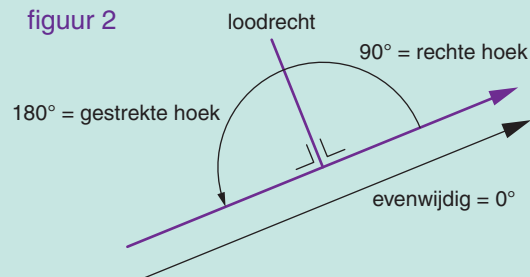
De ruimte tussen twee lijnen die elkaar snijden, heet een *hoek*. Een hoek wordt gemeten in *graden* ($^{\circ}$). De twee lijnen die de hoek maken, heten de *benen* van die hoek. Het maakt niet uit of je de benen van een hoek langer maakt of korter, de hoek blijft gelijk. Zie figuur 1. Een hoek wordt met een boogje aangegeven.

figuur 1



Als je twee rechte hoeken van 90° tegen elkaar aan legt, krijg je een gestrekte hoek (180°). Twee evenwijdige lijnen maken een hoek van 0 graden. Zie figuur 2.

figuur 2



- 1 a Welke hoek maken de wijzers van een klok om 9 uur?
- b Welke hoek maken de wijzers van een klok om 12 uur?
- c Welke hoek maken de wijzers van een klok om 6 uur?

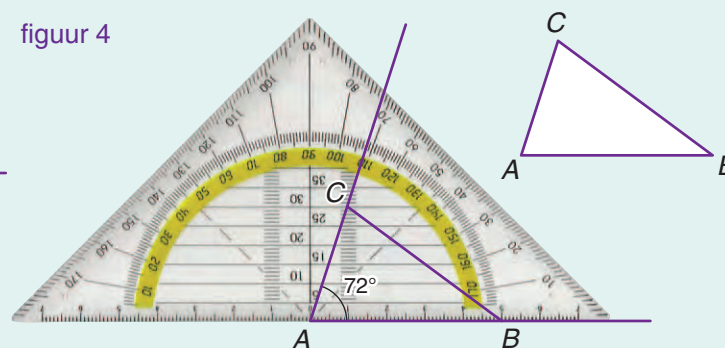
hoeken meten

In de figuren 4 en 5 staat een *geodriehoek*. Daarmee kun je hoeken meten. De horizontale lijn is de *nullijn*, het midden daarvan is het *nulpunt*. Daarin zijn van een driehoek *ABC* (rechts in figuur 4) de hoeken bij *A* en *B* opgemeten. Omdat driehoek *ABC* kleiner is dan de geodriehoek, zijn de zijden *AC* en *AB* verlengd (een stuk doorgetrokken).

figuur 3



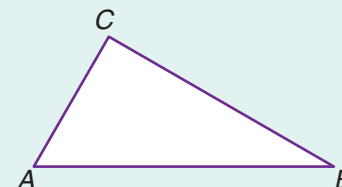
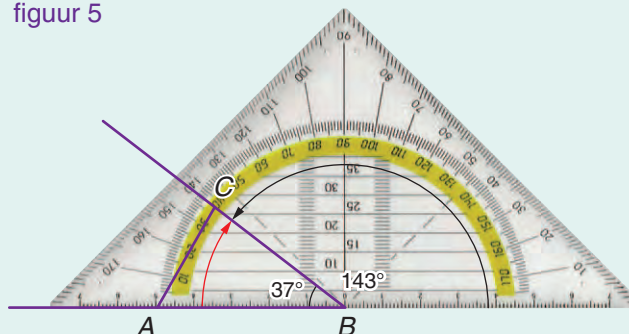
figuur 4



Leg eerst hoekpunt *A* op het nulpunt van de geodriehoek en zijde *AB* langs de nullijn. Hoek *A* van 72° kun je nu aflezen aan de rechterkant van de geodriehoek, iets voorbij de 70. Leg dan hoekpunt *B* op het nulpunt. Hoek *B* van 37° is in figuur 5 af te lezen op de binnenste gele cirkelboog, van links af tussen de 30 en 40.

Er staan telkens twee hoekwaarden tegenover elkaar in de cirkelbogen. Een van die getallen is kleiner dan 90° (voor een *scherpe* hoek), het andere getal is groter dan 90° (voor de bijbehorende *stompe* hoek). De getallen zijn samen $37^\circ + 143^\circ = 180^\circ$. Kijk goed welke waarde van de twee je moet hebben.

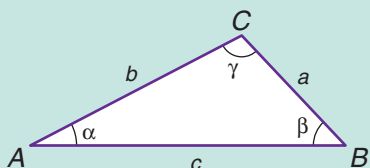
figuur 5



- 2
 - a Teken een driehoek ABC met hoek $A = 60^\circ$ en hoek $B = 30^\circ$.
 - b Meet de derde hoek bij C op. Verleng indien nodig AC en BC .
 - c Hoe had je het antwoord bij b ook kunnen vinden zonder de maatverdeling op de geodriehoek te gebruiken?
- 3
 - a Teken een driehoek ABC met hoek $A = 20^\circ$ en hoek $B = 70^\circ$.
 - b Meet de derde hoek bij C op. Verleng indien nodig CA en CB .
 - c Check je antwoord bij b zonder de maatverdeling op de geodriehoek te gebruiken.
- 4
 - a Teken een driehoek PQR met stompe hoek $P = 110^\circ$ en hoek $Q = 40^\circ$.
 - b Meet de hoek bij punt R .
 - c Vul in: hoek P + hoek Q + hoek $R = 110^\circ + 40^\circ + \dots^\circ = \dots^\circ$

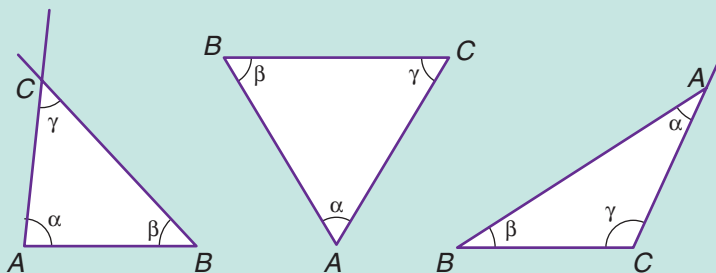
Griekse letters voor hoeken

α = alfa = a
 β = bèta = b
 γ = gamma = c
 δ = delta = d



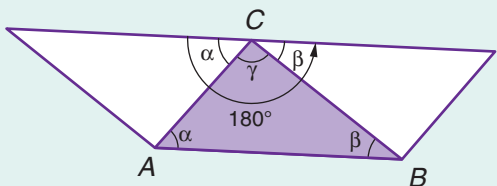
De hoekpunten van een driehoek of vierhoek duid je met schuingedrukte hoofdletters aan. Lijnen krijgen een kleine letter en voor hoeken worden letters van het Griekse alfabet gebruikt. De eerste 4 daarvan zijn: *alfa* (α), *bèta* (β), *gamma* (γ) en *delta* (δ). Bij hoekpunt A hoort hoek α , bij B hoort β , bij C hoort γ , bij D hoort δ , enzovoort.

- 5** a Meet zo nauwkeurig mogelijk hoe groot de hoeken α , β en γ zijn in de onderstaande driehoeken. Verleng eerst de zijden.
- b Bereken de som van de hoeken $\alpha + \beta + \gamma$ in elke driehoek.



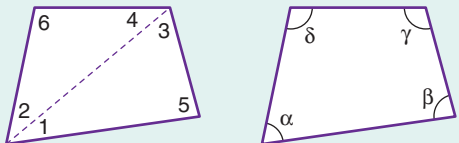
de som van hoeken in een driehoek en een vierhoek

De som van de hoeken in een driehoek is 180° .



Kopieer in gedachten de paarse driehoek ABC ($\triangle ABC$) hiernaast twee keer en leg de ene tegen de zijden AC en de andere tegen de zijde BC . Bij C komt dan een *gestrekte hoek* (180°).
 $\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$

De som van de hoeken in een vierhoek is 360° .

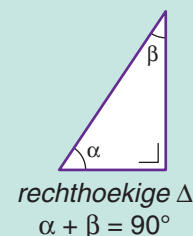


Verdeel de vierhoek in twee driehoeken door een *diagonaal* (gestippeld getekend) te trekken.
 hoek 1 + hoek 3 + hoek 5 = 180°
 hoek 2 + hoek 4 + hoek 6 = 180°
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

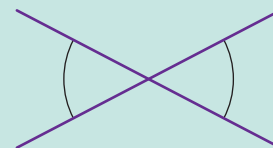
- 6** a De grote wijzer van een klok maakt een volledige rondgang (360°) in 60 minuten. Dat is ... graden per minuut.
- b De kleine wijzer maakt de 360° in 12 uur. Dat is ... graden per uur en ... graden per minuut.
- 7** Bereken de (kleinste) hoek tussen de wijzers van een klok.
- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| a om 02.00 uur | b om 05.00 uur | c om 04.00 uur | d om 12.30 uur |
| e om 12.10 uur | f om 04.10 uur | g om 10.10 uur | h om 05.20 uur |

scherphoekige, stomphoekige en overstaande hoeken

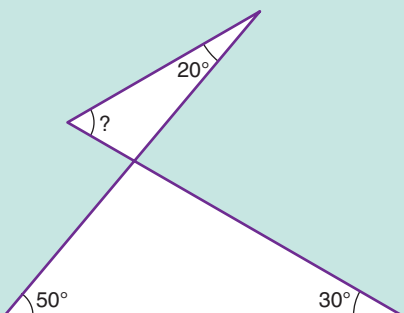
Een *stomphoekige driehoek* kan niet meer dan één stompe hoek hebben, want met een tweede stompe hoek zou de som van alle hoeken groter dan 180° zijn. In een *rechthoekige driehoek* zijn de twee scherpe hoeken samen 90° : $\alpha + \beta = 90^\circ$. Als $\alpha = 70^\circ$ is, dan is $\beta = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.



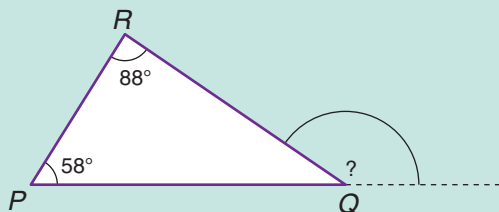
Hoeken waarvan de benen in elkaars verlengde liggen, zoals hiernaast, heten *overstaande hoeken*. Overstaande hoeken zijn even groot.



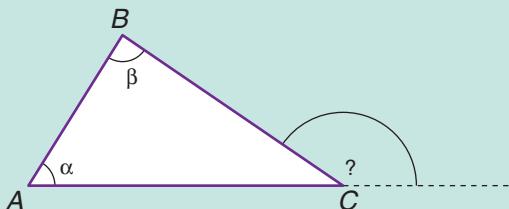
- 8 Bereken de hoek met het vraagteken.



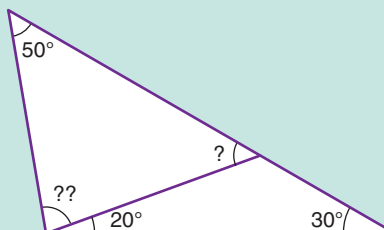
- 9 Hoe groot is de buitenhoek bij Q van ΔPQR ?



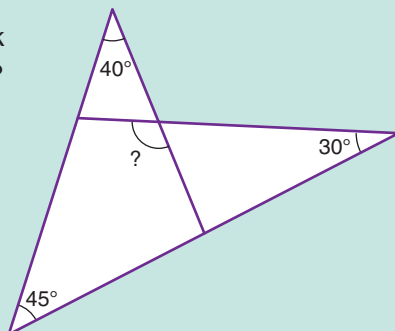
- 10 Hoe groot is de buitenhoek bij C van ΔABC ?



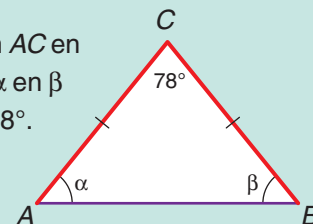
- 11 Bereken de onbekende hoeken in de driehoek hiernaast.



- 12 Hoe groot is de hoek met het vraagteken?



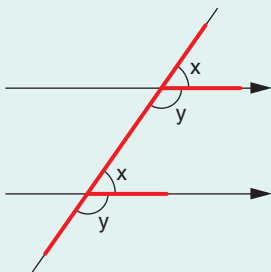
- 13 Een *gelijkbenige driehoek* is een driehoek met twee gelijke zijden. De hoeken tegenover die gelijke zijden zijn even groot.
In een driehoek zijn de zijden AC en BC even lang en de hoeken α en β even groot. De hoek bij C is 78° .
Hoe groot zijn de hoeken α en β ?



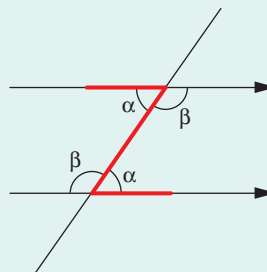
- 14 Een *gelijkzijdige driehoek* is een driehoek met drie gelijke zijden. Hoe groot zijn de drie hoeken?

F-hoeken en Z-hoeken

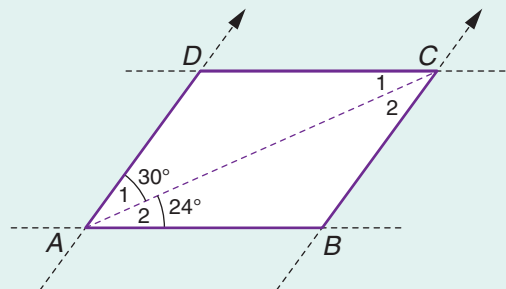
Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, ontstaan er gelijke hoeken.
Gelijke hoeken aan dezelfde kant van de snijlijn (x en y) heten *F-hoeken*.



Gelijke hoeken aan weerszijden van de snijlijn (α en β) heten *Z-hoeken*.

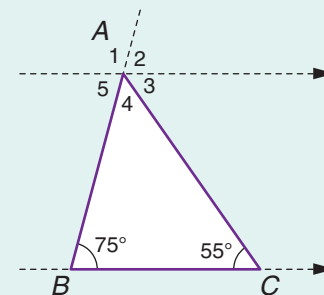


- 15 Op twee paar evenwijdige lijnen liggen de hoekpunten van het *parallellogram* $ABCD$.
 AC is een *diagonaal*.
Hoek $A_1 = 30^\circ$ en hoek $A_2 = 24^\circ$.
Bereken de andere hoeken in het parallellogram.

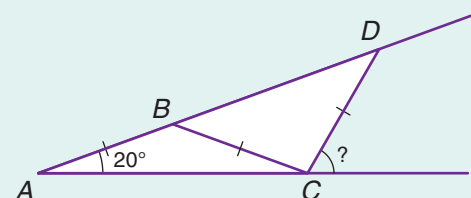




- 16** Hoe groot zijn de hoeken A_1 tot en met A_5 ?
Hoe groot is $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$?

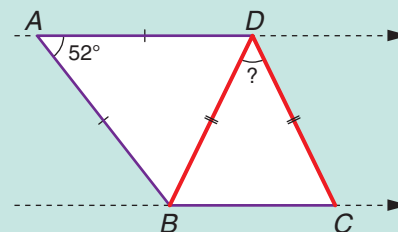


- 17** De punten B , C en D liggen op de benen van hoek A , zo dat $AB = BC = CD$.
Hoek $A = 20^\circ$. Bereken de hoek met het vraagteken bij C .

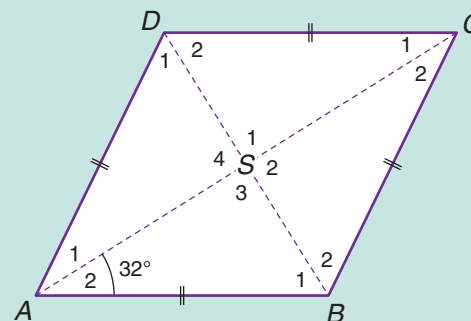


extra

- 18** In vierhoek $ABCD$ is AD evenwijdig aan BC en $DB = DC$ en $AD = AB$.
De hoek bij A is 52° .
Bereken de hoek met het vraagteken.

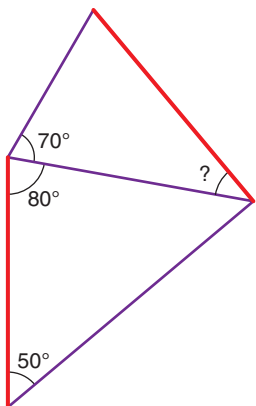


- 19** Een ruit is een parallellogram met vier gelijke zijden: $AB = BC = CD = DA$.
 S is het snijpunt van de diagonalen. Hoek A_2 is 32° .
Bereken alle hoeken in de ruit (ook die bij S).

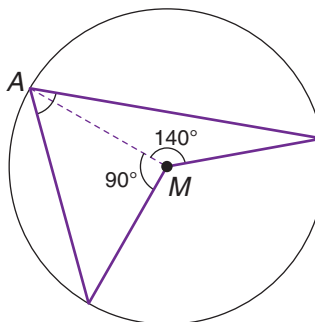


Toets – hoeken

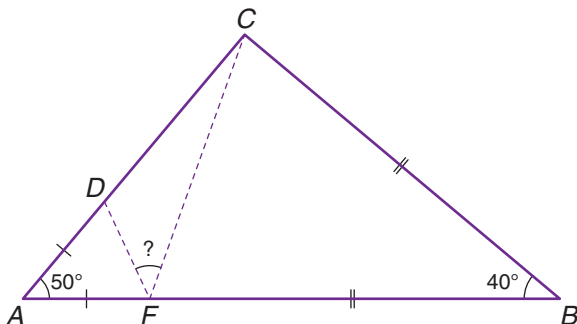
- 1 De twee rode lijnstukken zijn even lang.
Bereken de hoek met het vraagteken.



- 2 M is het middelpunt van de cirkel.
Bereken de hoek met het boogje bij A .



- 3 $AD = AF$ en $BF = BC$.
Hoek $A = 50^\circ$. Hoek $B = 40^\circ$.
Bereken de hoek met het vraagteken.



Driehoeken en cirkels

de oppervlakte van een driehoek

De oppervlakte van een rechthoek is *lengte* $\times$ *breedte*.

Omdat een rechthoekige driehoek de helft is van een rechthoek, geldt

$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} \times a \times b = \frac{a \times b}{2} = \frac{1}{2} ab.$$

De oppervlakte van de rechter driehoek is

$$\frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} = 14 \text{ cm}^2.$$

Driehoek ABC is niet rechthoekig, maar je kunt die wel splitsen in twee rechthoekige driehoeken.

Het linkerdeel heeft een oppervlakte $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$.

Het rechterdeel heeft een oppervlakte $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.

De oppervlakte van driehoek ABC is $10 + 6 = 16$.

De basis van de driehoek is de horizontale zijde.

De *hoogtelijn* (h) is de lijn loodrecht op de basis (b).

De oppervlakte van driehoek ABC is ook te berekenen

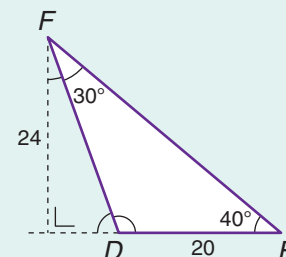
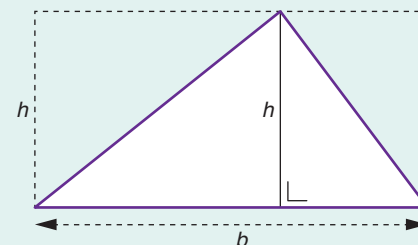
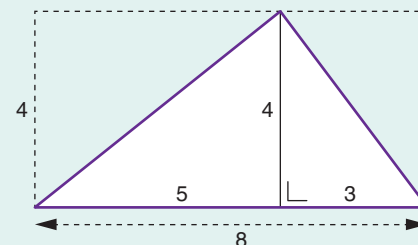
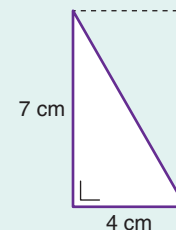
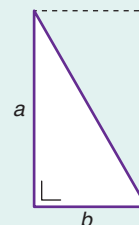
als de helft van de grote rechthoek $\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$.

De oppervlakte van een driehoek $= \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} bh$.

De formule $\frac{1}{2} bh$ geldt ook bij een stomphoekige driehoek.

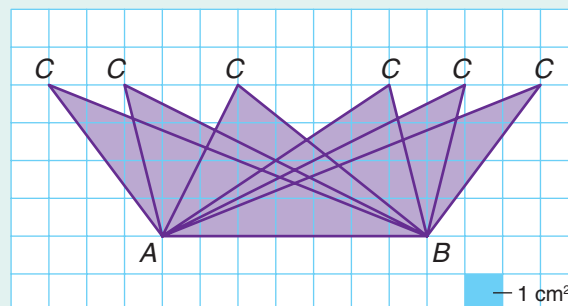
Bij een stomphoekige driehoek valt een hoogtelijn buiten de driehoek.

In driehoek DEF is de basis $DE = 20$ en de hoogtelijn uit hoekpunt F is 24.

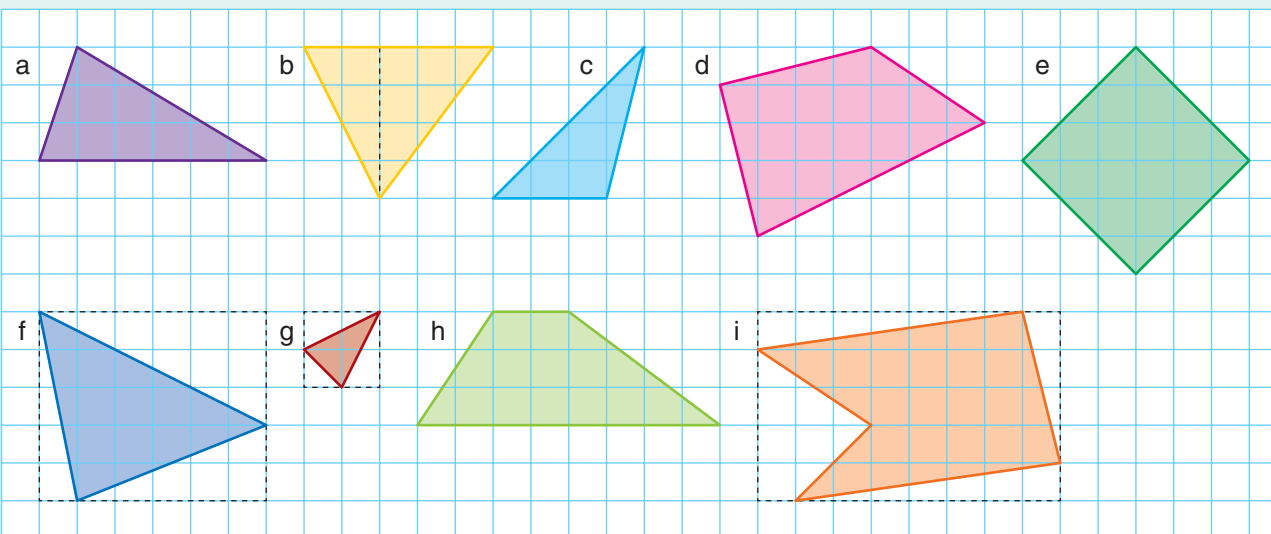


- 1 a Bereken met de formule $\frac{1}{2} bh$ de oppervlakte van DEF .
- b Bereken hoe groot de hoeken met de boogjes bij D en F zijn.

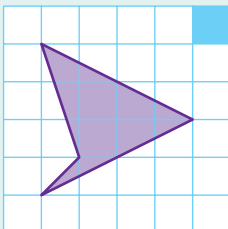
- 2 Alle driehoeken ABC hiernaast hebben dezelfde oppervlakte. Waarom is dat zo en hoe groot is die oppervlakte?



- 3 Bereken de oppervlakte van de figuren. De roostervierkantjes zijn 1 cm^2 . Tel halve rechthoeken op of trek af van een gestippeld getekende grotere rechthoek.



- 4 Het blauwe vierkantje is 1 cm^2 . Bereken de oppervlakte van de pijlfiguur.



de omtrek van een cirkel

Alle punten op de rand van een cirkel hebben dezelfde afstand tot het middelpunt M (zie fig. 1).

Die vaste afstand heet de *straal*, aangegeven met de letter r .

De *diameter* d van de cirkel is twee keer de straal: $d = 2r$.

Als je de straal zes keer afpast langs de omtrek van een cirkel kom je precies uit. Dat komt omdat er dan zes gelijkzijdige driehoeken ontstaan met drie gelijke zijden (namelijk r) en drie gelijke hoeken van 60° (zie fig. 2). $6 \times 60^\circ = 360^\circ$, precies de cirkel rond.

Je kunt nu de omtrek van een cirkel schatten. De omtrek zal iets meer zijn dan 6 keer de straal r , omdat de zes zwarte cirkelboogjes bij elkaar iets langer zijn dan de zes roodgekleurde zijden van de zeshoek.

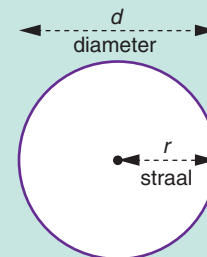
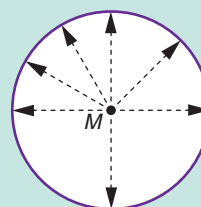
Dus de *omtrek* $\approx 6 \times r = 3 \times d$ (iets meer).

Berekeningen hebben geleerd, dat een betere benadering is:

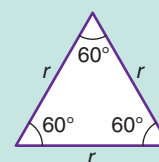
omtrek cirkel $\approx 3,14 \times \text{diameter}$.

Voor het getal 3,14 wordt de Griekse letter π (spreek uit: *pie*) gebruikt.

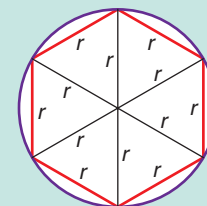
figuur 1



figuur 2



gelijkzijdige Δ



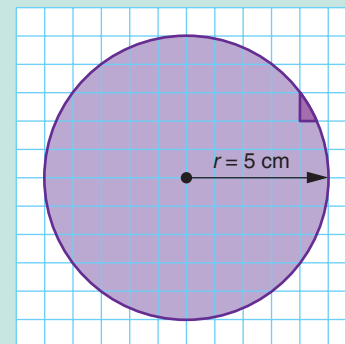
$$\text{omtrek} = \pi \times d = 2\pi \times r = 2\pi r \quad \text{met} \quad \pi \approx 3,14$$

- 5 De middencirkel op een voetbalveld heeft een straal van 10 yards = 9,15 meter. Bereken met een rekenmachine de omtrek van de middencirkel afgerond op centimeters.
- 6
 - a De evenaar heeft een lengte van ongeveer 40.000 km. Hoe groot is de straal van de aardbol?
 - b Stel je voor dat er, op 1 meter hoogte boven de evenaar, rondom de aardbol een touw gespannen wordt. Hoeveel langer dan 40.000 km zal dat touw zijn?
- 7 Een fietswiel heeft een diameter van 70 cm. Welke afstand leg je daarmee af per omwenteling? Rond af in centimeters.
- 8 Een regenpijp heeft een diameter van 12 cm. Bereken de omtrek ervan in millimeters nauwkeurig.

de oppervlakte van een cirkel

- 9 Leg uit waarom je de oppervlakte van het gearceerde driehoekje in de cirkel kunt schatten op iets meer dan $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$.

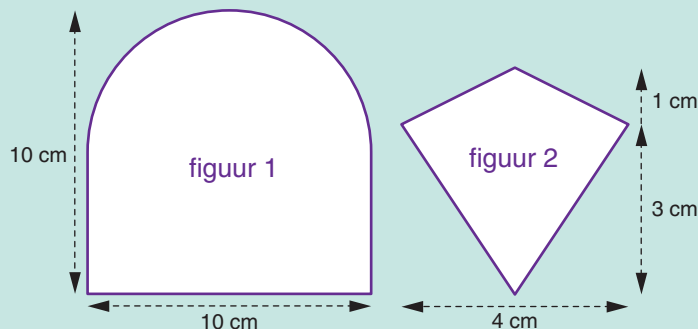
De cirkel heeft een straal (r) van 5 cm. Schat de oppervlakte van deze cirkel door roostervierkantjes en delen van roostervierkantjes op te tellen in de bovenste helft van de cirkel en daarna met 2 te vermenigvuldigen.



$$\text{oppervlakte cirkel} = \pi \times r^2 = \pi r^2$$

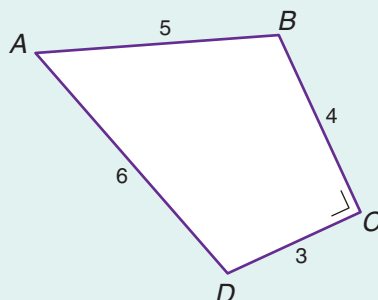
In de cirkel met $r = 5$ is de oppervlakte $\pi \times 5^2 = 25\pi \approx 25 \times 3,14 = 78,5$.
Let goed op de volgorde: eerst machtsverheffen (de straal kwadrateren), dan pas vermenigvuldigen met π .

- 10 Wat is het verschil tussen jouw antwoord bij opdracht 9 en het antwoord hierboven?
- 11 Een cirkel heeft een diameter van 1 meter precies. Bereken de omtrek in cm en de oppervlakte in cm^2 .
- 12 Een pizza heeft een diameter van 30 cm. Bereken (met de rekenmachine) de omtrek en de oppervlakte van die pizza, afgerond op gehele centimeters en vierkante centimeters.
- 13 Een cirkel heeft een omtrek van 20 cm. Bereken de oppervlakte van die cirkel, afgerond op cm^2 .
- 14 Bereken de oppervlakte en de omtrek van figuur 1 op 2 decimalen nauwkeurig.
- 15 Bereken de oppervlakte en de omtrek van figuur 2 op 2 decimalen nauwkeurig.
- 16 Een bepaalde cirkel heeft een oppervlakte van 7.854 cm^2 . Hoe groot is de straal? En hoe groot is de omtrek van die cirkel?

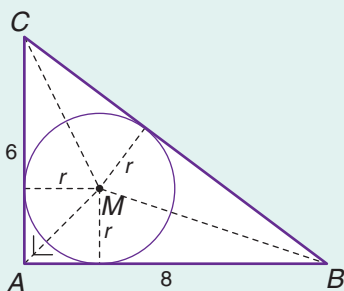
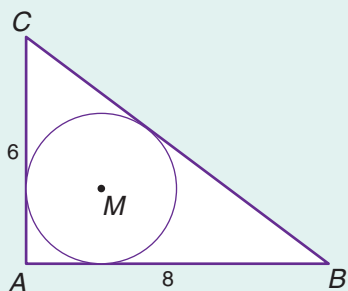


extra

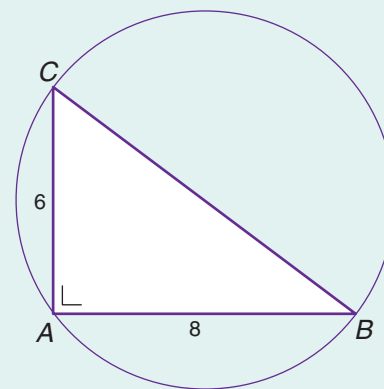
- 17** Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCD$.
Hoek $C = 90^\circ$, de zijden zijn 3, 4, 5 en 6.



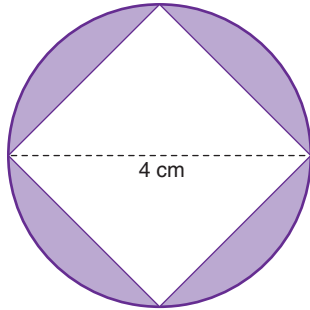
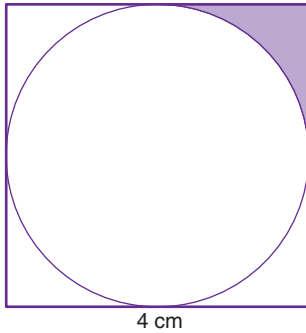
- 18** Driehoek ABC is rechthoekig in A . $AB = 8$ en $AC = 6$.
Bereken de straal van de ingeschreven cirkel (dat is de cirkel die alle drie de zijden raakt). Ga als volgt te werk:
- a** Verdeel driehoek ABC in drie driehoeken AMB , CMA en CMB .
 - b** Bereken de oppervlaktes van driehoeken AMB , CMA , CMB en ABC . (Laat r in je antwoord staan.)
 - c** Los de bijbehorende vergelijking op.



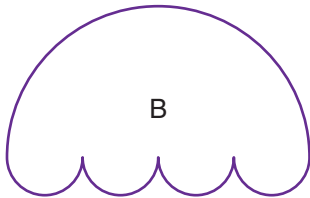
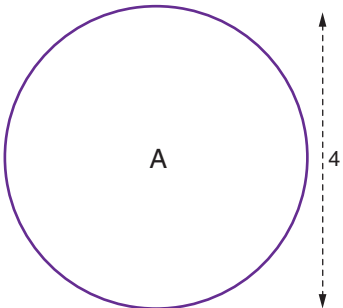
- 19** Bereken de oppervlakte van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC .
De omgeschreven cirkel gaat door A , B en C .



Toets – driehoeken en cirkels



- 1 Links hierboven is een vierkant getekend van 4 bij 4 cm met daarin een cirkel. Bereken de oppervlakte en de omtrek van het paarse puntje *exact*.
- 2 Rechts hierboven staat een cirkel getekend met een diameter van 4 cm en daarin een vierkant. Er staan aan de buitenkant van de cirkel vier 'segmenten' paars gearceerd. Bereken de *exacte* oppervlakte en omtrek van één zo'n segment.
- 3 Welke figuur (A of B) heeft de grootste omtrek?



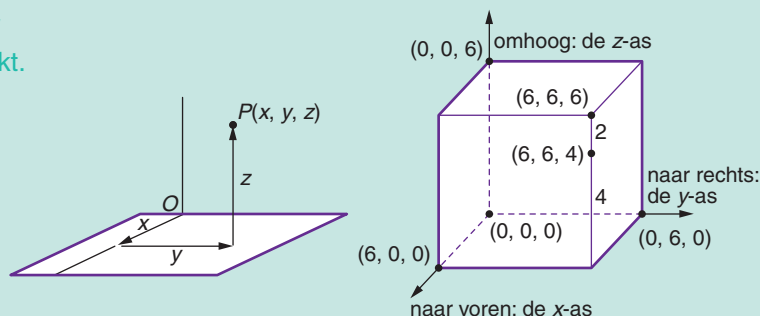
Meetkunde in de ruimte

de derde dimensie

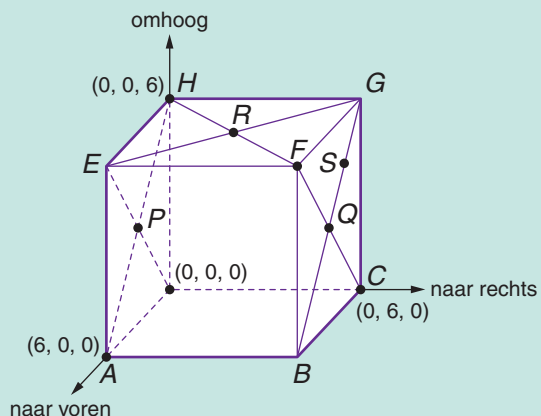
- Een getallenlijn heeft maar één dimensie of richting: de plaats van een punt op de lijn wordt aangegeven door één getal.
- Een plat vlak heeft twee dimensies. De positie van een punt in het vlak wordt aangegeven met twee getallen, de coördinaten van dat punt. De eerste coördinaat geeft het aantal stappen 'naar rechts', de tweede coördinaat geeft het aantal stappen 'omhoog'.
- In de ruimte is een derde richting nodig: naar voren/achter. Daarover is de volgende afspraak gemaakt.

(x, y, z) betekent, vanuit de oorsprong gezien:
 x naar voren;
 y naar rechts;
 z omhoog.

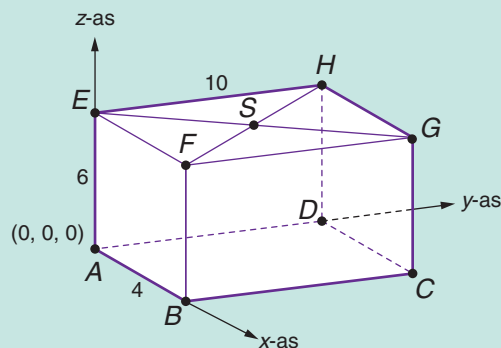
In de kubus hiernaast met een ribbe 6 zijn van enkele punten de coördinaten gegeven.



- 1** S is het midden van QG .
 Bepaal de coördinaten van de punten P , Q , R en S .



- 2** De afmetingen van de balk zijn 4 bij 10 bij 6.
- Bepaal de coördinaten van de acht hoekpunten.
 - Geef de coördinaten van het snijpunt S van FH en EG .



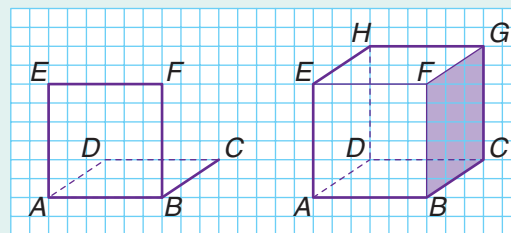
parallelprojectie

Een probleem bij de ruimtemeetkunde is hoe je een voorwerp (een kubus bijvoorbeeld) op een plat vlak (op een schoolbord of op papier) kunt afbeelden. Een parallelprojectie is een tekening van een ruimtelijk object in het vlak waarin evenwijdige lijnen ook op het papier evenwijdig getekend zijn.

Van een massieve kubus kun je de achterliggende lijnen niet zien. Die worden in dat geval gestippeld of gestreept getekend. Lijnstukken die in werkelijkheid naar achteren lopen, worden korter getekend.

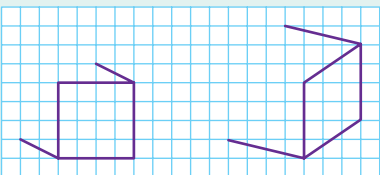
Van de ondoorzichtige kubus $ABCD.EFGH$ met een ribbe van 6 is het linkerzijvlak van de kubus onzichtbaar, evenals het achtervlak en het grondvlak. Teken deze kubus in stappen.

- 1 Teken eerst het zichtbare voorvlak $ABFE$ als vierkant met een zijde van 6.
- 2 Teken daarna de ribbe BC in de richting '3 naar rechts, 2 omhoog'. Merk op dat BC korter lijkt dan AB .
- 3 Teken de onzichtbare ribben DC en DA van het grondvlak gestippeld, evenwijdig aan BA en CB . Merk op dat DA korter lijkt dan DC .
- 4 Het achtervlak is evenwijdig aan het voorvlak en het linkerzijvlak is evenwijdig aan het rechterzijvlak. Teken de opstaande ribben DH en CG (6 omhoog) en het bovenvlak.

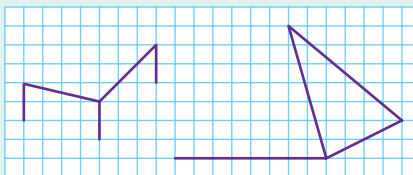


- 3 a AB is op papier en in werkelijkheid 6 (cm). De ribbe BC is in werkelijkheid even lang, maar korter getekend. Bereken met de Stelling van Pythagoras hoe lang BC op het papier is.
b De diagonalen BE en DE zijn in werkelijkheid even lang. Hoe lang? Benader in twee decimalen. Hoe lang zijn deze diagonalen op het papier?
- 4 a Teken op ruitjespapier een kubus $ABCD.EFGH$ met een met ribbe van 8 (halve centimeters). Teken de verkorte rib BC door vanuit B 3 naar rechts en 2 omhoog te gaan. Het rechterzijvlak, bovenvlak en voorvlak moeten zichtbaar zijn. Punt D is dus onzichtbaar.
b Teken een ondoorzichtige kubus met ribbe 8, maar nu met het linkerzijvlak zichtbaar, het voorvlak weer op ware grootte. Teken AD '3 naar links en 2 omhoog'. Punt C is dan onzichtbaar.
- 5 Teken op ruitjespapier een balk met lengte $AB = 8$, hoogte $AE = 4$ en diepte $BC = 6$ (halve centimeters). Zoek zelf een geschikte verkorting voor BC . Teken de balk twee keer:
 - a met een zichtbaar voorvlak, bovenvlak en rechter zijvlak.
 - b met een zichtbaar voorvlak, bovenvlak en linker zijvlak.

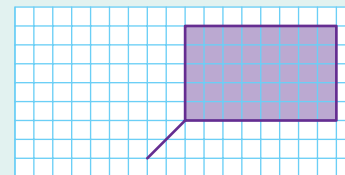
- 6** Je kunt een kubus ook vanuit een ander gezichtspunt tekenen. Let daarbij op de evenwijdige ribben. Teken de onderstaande delen van een massieve kubus op ruitjespapier na en teken de ontbrekende (stippel)lijnen.



- 7** De linkerfiguur is een rechthoekige balk, de rechterfiguur een piramide waarvan het grondvlak een vierkant is. Neem ze over op ruitjespapier en maak beide tekeningen af. Stippel de onzichtbare ribben.



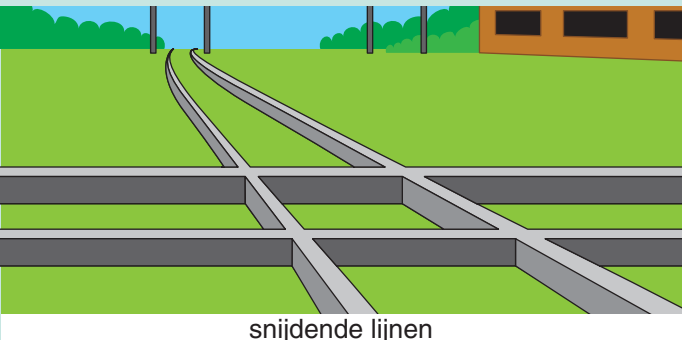
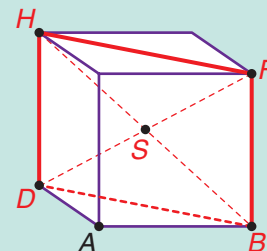
- 8** Hieronder staat een balk getekend, van onderen af gezien. Het voorvlak is zichtbaar (gekleurd), het bovenzvlak is niet zichtbaar. Neem de tekening over op ruitjespapier en maak die af.



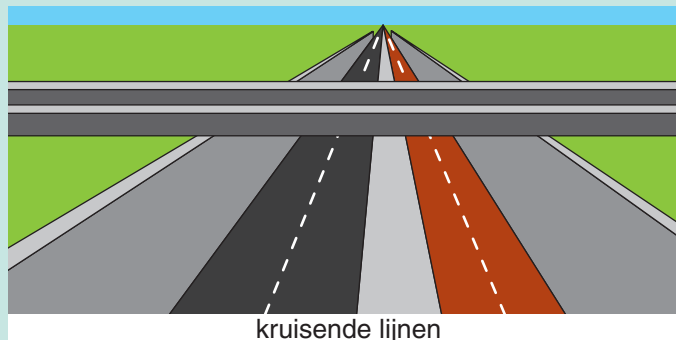
snijden en kruisen

Lijnen die in één vlak liggen, *snijden* elkaar of lopen *evenwijdig*.
Lijnen die niet in één vlak liggen, *kruisen* elkaar.
Alle roodgekleurde lijnen van deze kubus liggen in het vlak *DBFH*.

De lijnen *DB* en *HF* zijn *evenwijdig* en ook *DH* en *BF*.
De lijnen *DF* en *HB* *snijden* elkaar (in het *snijpunt S*).
De lijnen *AB* en *DF* *snijden* elkaar niet, ze liggen niet in één vlak en *kruisen* elkaar.



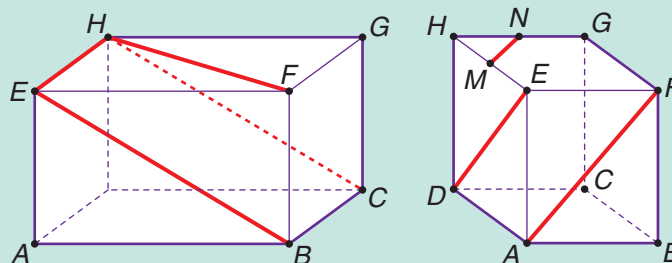
snijdende lijnen



kruisende lijnen

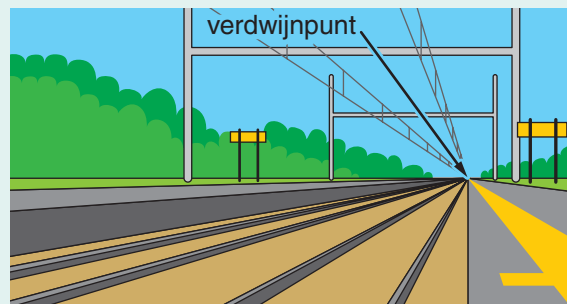
- 9 Hiernaast staan twee rechthoekige balken $ABCD.EFGH$ getekend. Bepaal de onderlinge ligging (snijdend, evenwijdig, kruisend) van de volgende paren lijnen in de twee rechthoekige balken $ABCD.EFGH$.

- a In de linkerbalk:
 EH en AB EH en EB EB en HC EB en HF HB en EC
- b In de rechterbalk (M is het midden van HE , N is het midden van HG):
 DE en AF DG en AF GC en AF AD en FE NM en FE

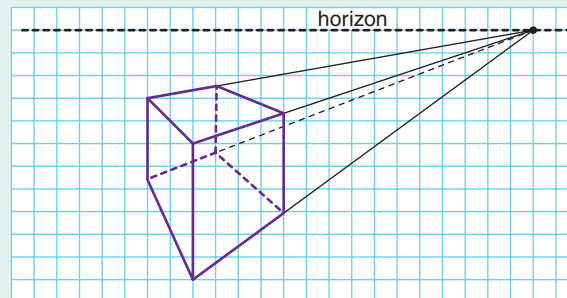


perspectief

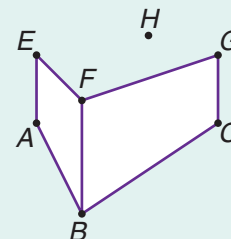
In werkelijkheid lijken evenwijdige lijnen niet evenwijdig te lopen, maar samen te komen op de horizon, in een *verdwijnpunt*. Niet alleen de spoorrails, maar ook de elektriciteitsdraden in de afbeelding hiernaast lopen naar het verdwijnpunt. In dit *perspectief* zit 'diepte'.



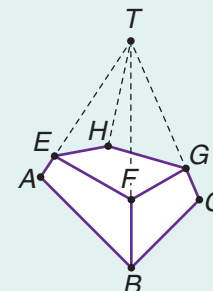
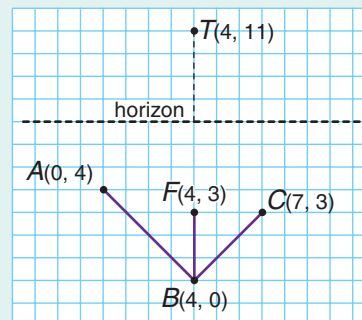
- 10 Van een kubus is een perspectieftekening gemaakt. Rechtsboven is een verdwijnpunt getekend, waar vier lijnen samenkomen op de horizon. Neem de tekening over op ruitjespapier. Ergens midden op de horizon zit nog een verdwijnpunt, waar vier andere lijnen samenkomen. En links is er nog een derde verdwijnpunt. Teken telkens de vier samenkomende lijnen en controleer of ze netjes in één punt uitkomen.



- 11** a Neem een stuk ruitjespapier en kies daarop een oorsprong $(0, 0)$ links onderaan, iets uit de kant. Teken de punten $A(2, 4)$ $B(4, 0)$ $C(10, 4)$ $E(2, 7)$ $F(4, 5)$ en $G(10, 7)$.
- b Verbind die punten op de manier zoals hiernaast is aangegeven. Dit is een deel van een perspectieftekening van een rechthoekige balk $ABCD.EFGH$, waarbij ribbe BF 'naar voren uitsteekt' en het grondvlak $ABCD$ onzichtbaar is. Punt H ligt boven het onzichtbare punt D . Zoek twee verdwijnpunten en de horizon en maak de tekening af. Teken onzichtbare ribben gestippeld.
- c Er is een derde verdwijnpunt, dat je kunt vinden als je de diagonalen FH en BD doortrekt.
- d Wat zijn in je tekening de coördinaten van de drie verdwijnpunten?



- 12** De lijnen in het grondvlak en bovenvlak van deze *afgeknotte piramide* $ABCD.EFGH$ zijn evenwijdig. T (de top) is het punt waar alle opstaande ribben na verlenging in terechtkomen.
- Kies een oorsprong $(0, 0)$ onderaan, 4 ruitjes links van punt B op een blaadje roosterpapier. Teken hierna eerst het gedeelte met $A(0, 4)$ $B(4, 0)$ $C(7, 3)$ $F(4, 3)$ $T(4, 9)$ en de verdwijnpunten van de evenwijdige lijnen op de horizon. Teken daarna de rest van de afgeknotte piramide.



inhouden berekenen

In de formules voor de inhoud van een aantal bekende ruimtelijke figuren is de oppervlakte van een grondvlak aangegeven met G , de hoogte met h , de straal met r . Een ander woord voor inhoud is *volume* (V).

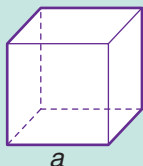
Op pagina 86 staat een overzicht van ruimtelijke figuren met de formules voor de berekening van hun inhoud.

Op de bovenste rij (met uitzondering van de bol) staan figuren met dezelfde formule voor het volume:
 $V = G \times h$ ($V = Gh$).

Op de onderste rij staan figuren die uitlopen in een punt (de top) en daardoor een kleinere inhoud hebben:

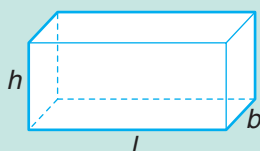
$V = \frac{1}{3} \times G \times h$, kortweg $V = \frac{1}{3} Gh$. De grensvlakken van de figuren heten ook wel de *zijvlakken*.

kubus



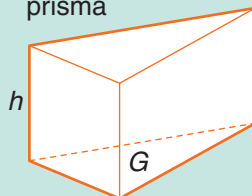
$$V = a^3$$

balk



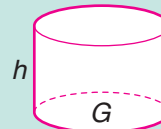
$$V = l \times b \times h$$

prisma



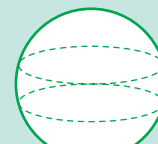
$$V = G \times h$$

cilinder



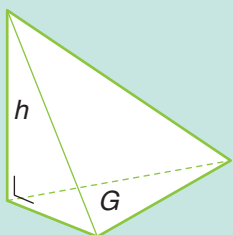
$$V = G \times h = \pi r^2 h$$

bol



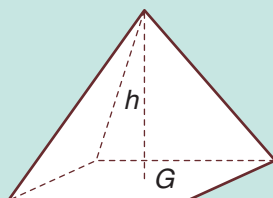
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

piramide (3-zijdig)



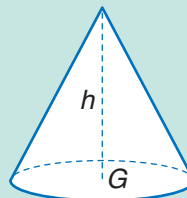
$$V = \frac{1}{3} Gh$$

piramide (4-zijdig)

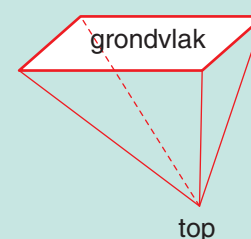


$$V = \frac{1}{3} Gh$$

kegel



$$V = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



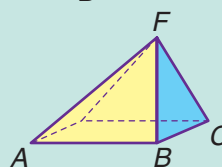
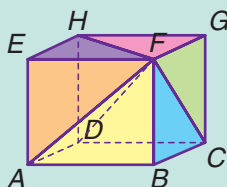
De top van een piramide hoeft niet letterlijk het hoogste punt te zijn, het grondvlak hoeft niet letterlijk het laagste grensvlak (zijvlak) van de figuur te zijn, zoals in de vierde figuur van de onderste rij. (En een zijvlak hoeft niet aan de zijkant te liggen).

De inhoud van een kegel en van een piramide is $\frac{1}{3}$ keer de oppervlakte van het grondvlak keer de hoogte.

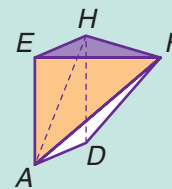
Hoe is de factor $\frac{1}{3}$ in de inhoudsformules van figuren met een top te verklaren? In de kubus $ABCD.EFGH$ hieronder (midden) zijn drie gelijke piramides te zien met F als top, die de kubus samen volledig opvullen:

- 1 Piramide $F.ABCD$ (met top F en grondvlak $ABCD$, de geel-blauwe piramide)
- 2 Piramide $F.ADHE$ (met top F en grondvlak $ADHE$, de oranje-paarse piramide)
- 3 Piramide $F.DCGH$ (met top F en grondvlak $DCGH$, de rood-groene piramide)

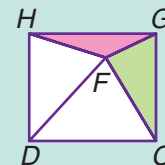
De inhoud van één zo'n piramide is eenderde van de inhoud van de kubus.



①



②

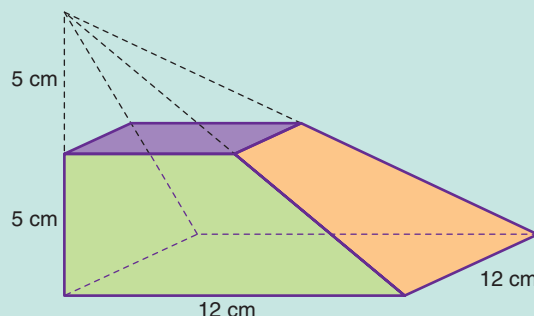


③



- 13** Een piramide met een vierkant grondvlak met een zijde van 12 cm en een hoogte van 10 cm wordt op halve hoogte doormidden gezaagd (zie de tekening hiernaast). Zo ontstaat een 'afgeknotte' piramide.

Bereken de inhoud van deze afgeknotte piramide.

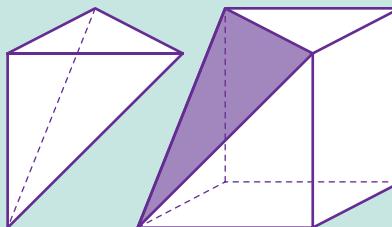


- 14** Bereken met behulp van een rekenmachine het volume van:

- a een rechthoekige tegel van 20 bij 30 cm en een dikte van 5 cm;
- b een prisma met een hoogte van 10 cm en als grondvlak een driehoek met zijden van 3, 4 en 5 cm;
- c een buis met een lengte van 2 meter en een diameter van 20 cm;
- d de aardbol (neem 40.000 km als lengte van de evenaar);
- e een kegel met diameter van de grondcirkel 10 cm en hoogte 10 cm.

- 15** Van een kubus met een ribbe van 6 cm wordt een piramidepunt afgezaagd. Zie de tekening hiernaast.

Bereken de inhoud van die piramide.

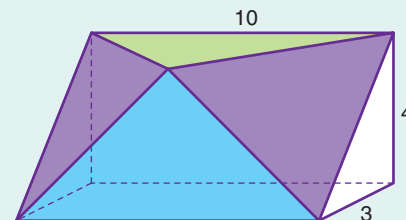
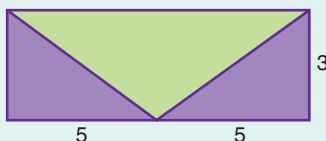


extra

- 16** Dit blok is ontstaan doordat van een houten balk van 3 dm bij 4 dm bij 10 dm twee gelijke punten zijn afgezaagd.

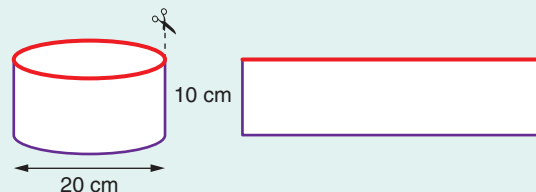
Bereken de inhoud van het blok.

bovenaanzicht



- 17** Bereken de zijoppervlakte (de 'mantel') van een cilinder met een diameter van 20 cm en een hoogte van 10 cm. Gebruik een rekenmachine.

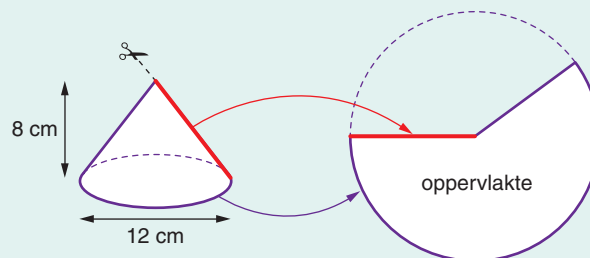
Je kunt de cilinder in gedachten open knippen evenwijdig aan de as van de cilinder en dan vlak uitspreiden.



- 18** De grondcirkel van een kegel heeft een diameter van 12 cm. De hoogte van de kegel is 8 cm. Bereken de gekromde zijoppervlakte van de kegel (de oppervlakte van de 'kegelmantel').

Knip de kegel denkbeeldig open langs de rode lijn en spreid de mantel uit in het platte vlak.

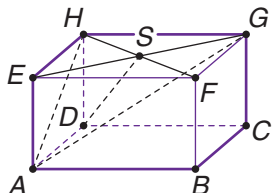
- Bereken de lengte van het rode lijnstuk met de Stelling van Pythagoras.
- Wat is de lengte van de blauwe grondcirkel?
- Hoe groot is de oppervlakte van de kegelmantel?



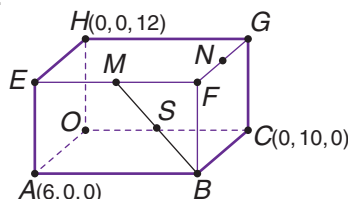
Toets – meetkunde in de ruimte

- 1** Zijn de aangegeven lijnen in de balk $ABCD.EFGH$ snijdend, evenwijdig of kruisend?

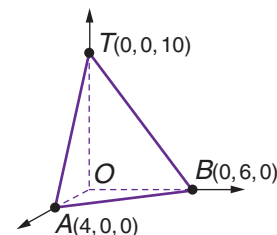
AH en BG zijn ...
 BG en DS zijn ...
 DS en BF zijn ...
 DS en CG zijn ...
 AG en DS zijn ...



- 2** Hiernaast staat de balk $OABC.HEFG$ met $O(0,0,0)$ $A(6,0,0)$ $C(0,10,0)$ en $H(0,0,12)$. M is het midden van EF , N is het midden van FG en S is het midden van MB . Schrijf de coördinaten op van de punten M , N en S .



- 3** Bereken de inhoud van de piramide $T.OAB$.



Meetkunde

De Stelling van Pythagoras

1 $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

$$15^2 + x^2 = 17^2$$

$$225 + x^2 = 289$$

$$x^2 = 289 - 225 = 64$$

$$x = 8$$

2 $40^2 + x^2 = 41^2$
 $1.600 + x^2 = 1.681$
 $x^2 = 1.681 - 1.600 = 81$
 $x = 9$

$$7^2 + 24^2 = x^2$$
$$49 + 576 = x^2$$
$$x^2 = 625$$
$$x = 25$$

$$20^2 + x^2 = 29^2$$
$$400 + x^2 = 841$$
$$x^2 = 841 - 400 = 441$$
$$x = 21$$

3 $2^2 + 3^2 + 6^2 = x^2$
 $4 + 9 + 36 = x^2$
 $x^2 = 49$
 $x = 7$

$$x^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2$$
$$x^2 + 16 + 64 = 81$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1$$

$$4^2 + 4^2 + 7^2 = x^2$$
$$16 + 16 + 49 = x^2$$
$$x^2 = 81$$
$$x = 9$$

4 a $2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$ en $\sqrt{20} \approx 4,5$
b $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ en $\sqrt{13} \approx 3,6$
c $5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$ en $\sqrt{50} \approx 7,1$
d $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ en $\sqrt{25} = 5$
e $(3,2)^2 + (6,3)^2 = 49,93$ en $\sqrt{49,93} \approx 7,1$

Je kunt de lengtes van de zijden bij e berekenen met Pythagoras.

$$1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 \text{ en } \sqrt{10} \approx 3,2 \text{ dus } a \approx 3,2$$

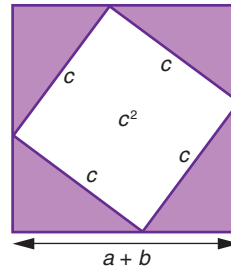
$$6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40 \text{ en } \sqrt{40} \approx 6,3 \text{ dus } b \approx 6,3$$

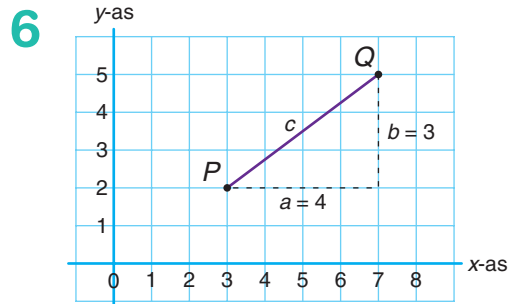
$$7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50 \text{ en } \sqrt{50} \approx 7,1 \text{ dus } c \approx 7,1$$

$$\text{en } a^2 + b^2 = 10 + 40 = 50 = c^2$$

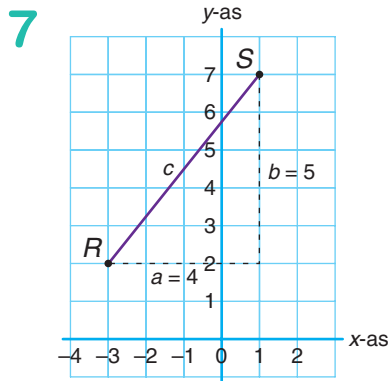
$$c = \sqrt{50} \approx 7,1$$

5 De oppervlakte van een driehoekje is $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ cm}^2$.
De oppervlakte van het gekleurde deel is $4 \times 24 = 96 \text{ cm}^2$.
De oppervlakte van het hele vierkant is $(6 + 8)^2 = 14^2 = 196 \text{ cm}^2$.
De oppervlakte van het witte deel is $196 - 96 = 100 \text{ cm}^2$.
De langste zijde van een driehoekje is $\sqrt{100} = 10$.

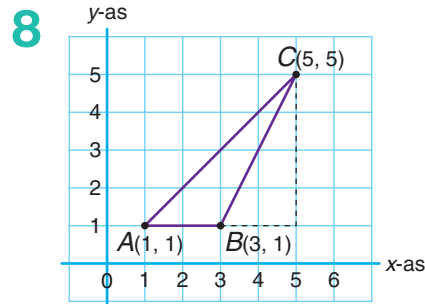




De afstand PQ is precies 5 cm,
want $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ en
de lengte van $c = \sqrt{25} = 5$.



De afstand RS is $\sqrt{41} \approx 6,4$ cm,
want $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$ en
de lengte van $c = \sqrt{41}$.



De hoogte van de driehoek is 4. De basis is 2.
De oppervlakte is $\frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4 \text{ cm}^2$.
 $AB = 2 \text{ cm}$ $BC = \sqrt{(2^2 + 4^2)} = \sqrt{20} \approx 4,47$
 $AC = \sqrt{(4^2 + 4^2)} = \sqrt{32} \approx 5,66$
De omtrek is $2 + \sqrt{32} + \sqrt{20} \approx 2 + 10,13 \approx 12,1 \text{ cm}$.

9 De oppervlakte is $\frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84 \text{ cm}^2$
 $AC = \sqrt{(9^2 + 12^2)} = \sqrt{(81 + 144)} = \sqrt{225} = 15$
 $CB = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{(25 + 144)} = \sqrt{169} = 13$
De omtrek is $13 + 14 + 15 = 42 \text{ cm}$.

10 a De oppervlakte is $\frac{1}{2} \times 80 \times 60 = 2.400$.
b $BC = \sqrt{(60^2 + 80^2)} = \sqrt{10.000} = 100$
c $\frac{1}{2} \times AD \times 100 = 2.400$
d $AD = 2.400 : 50 = 48$

11 $CD = \sqrt{(2^2 + 1^2)} = \sqrt{3}$
De oppervlakte is $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

12 $OA = \sqrt{(1^2 + 3^2)} = \sqrt{10} \approx 3,162$
 $OB = \sqrt{(2^2 + 4^2)} = \sqrt{20} \approx 4,472$
 $OC = \sqrt{(3^2 + 5^2)} = \sqrt{34} \approx 5,831$

$AP = \sqrt{(4^2 + 6^2)} = \sqrt{52} \approx 7,211$
 $BP = \sqrt{(3^2 + 5^2)} = \sqrt{34} \approx 5,831$
 $CP = \sqrt{(2^2 + 4^2)} = \sqrt{20} \approx 4,472$

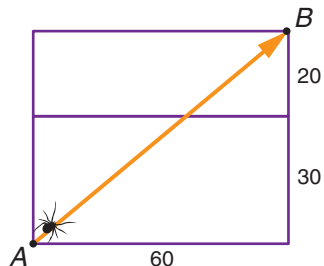
$OAP \approx 3,16 + 7,21 = 10,373$
 $OBP \approx 4,472 + 5,831 = 10,303$
 $OCP \approx 5,831 + 4,472 = 10,303$

De routes via B en C zijn het kortst.

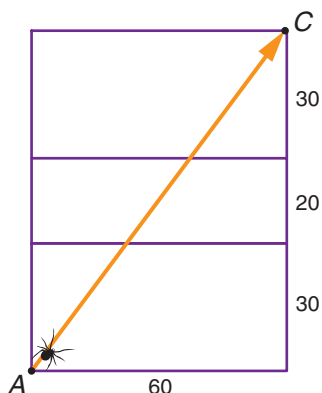
13 a $AB = \sqrt{(12^2 + 6^2)} = \sqrt{(144 + 36)} = \sqrt{180}$
b $DE = \sqrt{(4^2 + 12^2)} = \sqrt{(16 + 144)} = \sqrt{160}$
Er komt dus hetzelfde uit.

$BD = \sqrt{(180 + 4^2)} = \sqrt{196} = 14 \text{ meter}$
 $BD = \sqrt{(160 + 6^2)} = \sqrt{196} = 14 \text{ meter}$

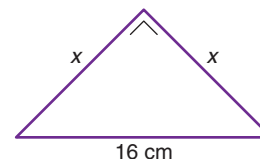
14 $AB = \sqrt{(2.500 + 3.600)} \approx 78 \text{ cm}$



15 $AC = \sqrt{(60^2 + 80^2)} = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$



16 $x^2 + x^2 = 16^2 = 256$
 $x^2 = 128$
 $x = \sqrt{128} \approx 11,3 \text{ cm} = 113 \text{ mm}$



17 a Het middelpunt van die cirkel is (2, 0); alle punten liggen daar even ver (namelijk 5 cm) vandaan.

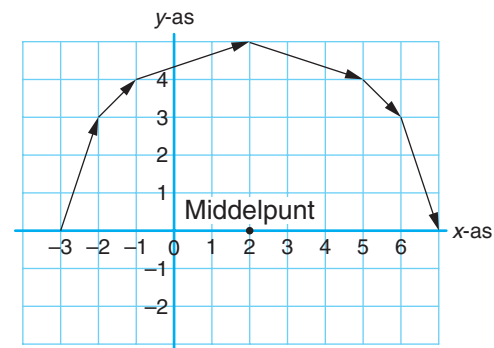
b De 4 lange stukken hebben allemaal dezelfde lengte $\sqrt{(1^2 + 3^2)}$ en de 2 korte stukjes ook $\sqrt{(1^2 + 1^2)}$.

De route is $4 \times \sqrt{10} + 2 \times \sqrt{2} \approx 4 \times 3,162 + 2 \times 1,414 = 15,476 \approx 15,48 \text{ cm}$ lang.

c In het midden is er een rechthoek van $6 \times 4 = 24$.

De driehoeken links en rechts kun je steeds bij elkaar optellen tot 1 rechthoek.

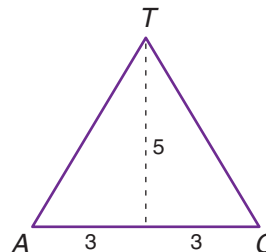
$$3 + 1 + 3 + 24 + 6 = 37 \text{ cm}^2$$



18 a De hoogte in het zijvlak is $\sqrt{(4^2 + 3^2)} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$.

De oppervlakte van $\triangle BCT$ is $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15 \text{ cm}^2$.

De totale oppervlakte is $4 \times 15 + 6 \times 6 = 60 + 36 = 96 \text{ cm}^2$.



b Bereken eerst AC (diagonaal in vierkant $ABCD$).

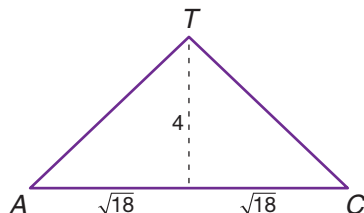
$$AC = \sqrt{(6^2 + 6^2)} = \sqrt{72}.$$

$$\text{Dus } \frac{1}{2} AC = \sqrt{(3^2 + 3^2)} = \sqrt{18}.$$

Bereken dan in driehoek ATC de lengte van AT .

$$AT^2 = 4^2 + 18 = 34.$$

$$AT = \sqrt{34}$$



Toets – de Stelling van Pythagoras

De hoogte van het dak is $5 - 3 = 2$ m.

De schuine rand is $\sqrt{(3^2 + 2^2)} = \sqrt{13} \approx 3,6$ m = 360 cm.

De oppervlakte van het dak is $2 \times 10 \times 3,6 = 72$ m².

De oppervlakte van de platen is $0,3 \times 0,5 = 0,15$ m².

Er zijn $72 \text{ m}^2 : 0,15 \text{ m}^2 = 480$ platen nodig.

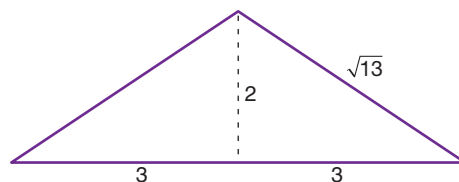
Je kunt het ook zo berekenen:

In de lengte zijn er $10 : 0,50 = 20$ platen nodig.

Aan de schuine zijde zijn er twee keer $(360 : 30)$

dus twee keer 12 platen nodig.

In totaal zijn er dus $2 \times 12 \times 20 = 480$ platen nodig.



(1 punt)

(3 punten)

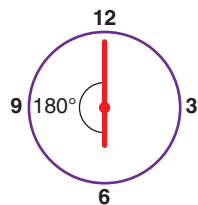
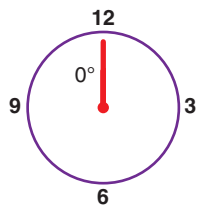
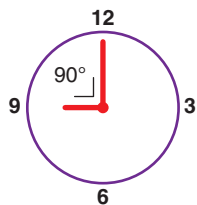
(2 punten)

(2 punten)

(2 punten)

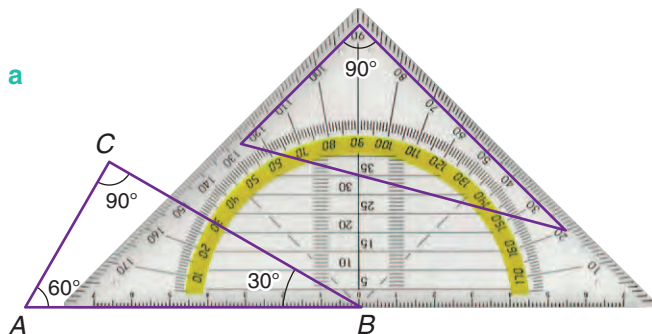
Hoeken

1



2

a

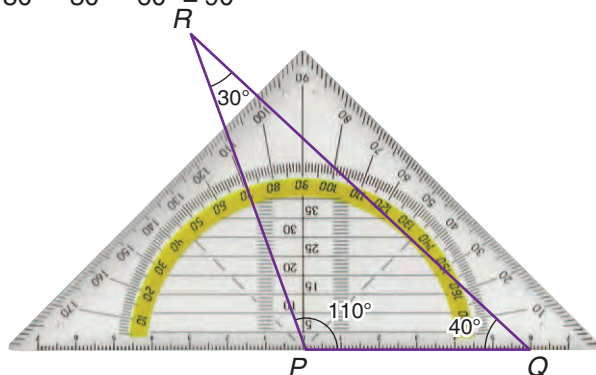


- b De hoek bij C wordt 90° en dat kun je controleren door de top van de geodriehoek tegen hoekpunt C van de driehoek aan te schuiven.

c $180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$

4

a



- b De hoek bij R is 30° .

c $110^\circ + 40^\circ + 30^\circ = 180^\circ$

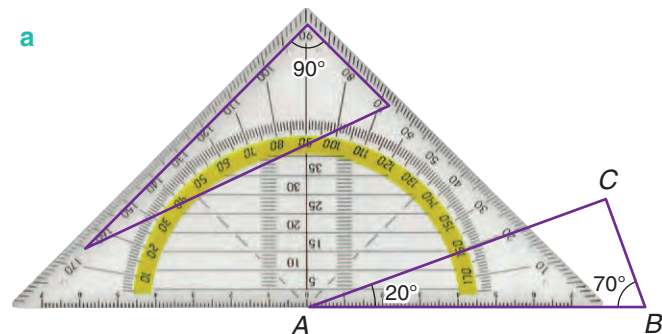
6

- a 6° per minuut

b 30° per uur = $0,5^\circ$ per minuut

3

a



- b De hoek bij C is 90° .

c $180^\circ - 70^\circ - 20^\circ = 90^\circ$

5

(ongeveer:)

driehoek	α	β	γ	$\alpha + \beta + \gamma$
1	84°	47°	49°	180°
2	62°	59°	59°	180°
3	32°	33°	115°	180°

- 7** a De grote wijzer staat op 0° . De kleine wijzer staat op $2 \times 30^\circ = 60^\circ$. De hoek is 60° .
b De grote wijzer staat op 0° . De kleine wijzer staat op $5 \times 30^\circ = 150^\circ$. De hoek is 150° .
c De grote wijzer staat op 0° . De kleine wijzer staat op $4 \times 30^\circ = 120^\circ$. De hoek is 120° .
d De grote wijzer staat op $30 \times 6^\circ = 180^\circ$. De kleine wijzer staat op $30 \times 0,5^\circ = 15^\circ$. De hoek $= 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.
e De grote wijzer staat op $10 \times 6^\circ = 60^\circ$. De kleine wijzer staat op $10 \times 0,5^\circ = 5^\circ$. De hoek $= 60^\circ - 5^\circ = 55^\circ$.
f De grote wijzer staat op $10 \times 6^\circ = 60^\circ$. De kleine wijzer staat op $4 \times 30^\circ + 10 \times 0,5^\circ = 120^\circ + 5^\circ = 125^\circ$. De hoek $= 125^\circ - 60^\circ = 65^\circ$.
g De grote wijzer staat op $10 \times 6^\circ = 60^\circ$. De kleine wijzer staat op $10 \times 30^\circ + 10 \times 0,5^\circ = 305^\circ$. De hoek $= 305^\circ - 60^\circ = 245^\circ$. Omdat het om de kleinste hoek gaat, neem je $360^\circ - 245^\circ = 115^\circ$.
h De grote wijzer staat op $20 \times 6^\circ = 120^\circ$. De kleine wijzer staat op $5 \times 30^\circ + 20 \times 0,5^\circ = 150^\circ + 10^\circ = 160^\circ$. De hoek $= 160^\circ - 120^\circ = 40^\circ$.

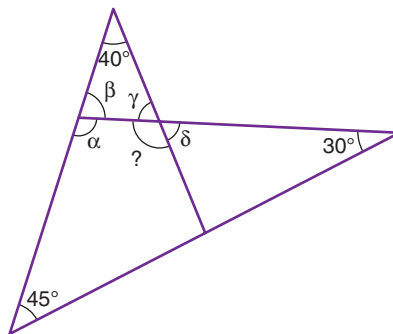
- 8** $? = 180^\circ - 20^\circ - 100^\circ = 60^\circ$
De derde hoek is even groot als de overstaande hoek (de punt van de onderste driehoek): $180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 100^\circ$.

- 9** $? = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$ want de tweede hoek bij Q is $180^\circ - 58^\circ - 88^\circ = 34^\circ$.

- 10** De tweede hoek bij c $= 180 - \alpha - \beta$.
 $? = 180 - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$

- 11** De hoek tegenover $? = 180^\circ - 30^\circ - 20^\circ = 130^\circ$.
 $? = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$
 $?? = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$

- 12** Hoek $\alpha = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$.
Hoek β is $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.
Hoek $\gamma = \delta = 180^\circ - 75^\circ - 40^\circ = 65^\circ$.
 $? = (360^\circ - (2 \times 65^\circ)) : 2 = 230^\circ : 2 = 115^\circ$

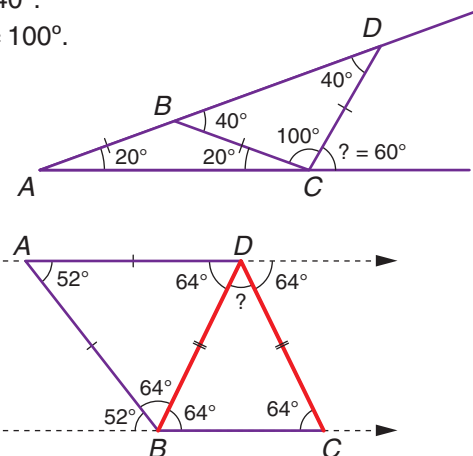


13 $\alpha = \beta = (180^\circ - 78^\circ) : 2 = 51^\circ$.

15 $C_1 = A_2 = 24^\circ$ $C_2 = A_1 = 30^\circ$ $B = 180^\circ - 24 - 30 = 126^\circ$ $D = B = 126^\circ$

16 $A_4 = 180^\circ - 55^\circ - 75^\circ = 50^\circ$
 $A_5 = 75^\circ$
 $A_3 = 55^\circ$
 $A_2 = 75^\circ$
 $A_1 = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$
 De som van de 5 hoeken is 360° .

17 Omdat $AB = BC$ is de hoek bij A gelijk aan de linkerhoek bij C . De linkerhoek bij B is $180^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 140^\circ$. De rechterhoek bij B is $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.
 Omdat $BC = BD$ is de linkerhoek bij BD ook 40° .
 De middelste hoek bij $C = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.
 De rechterhoek bij C is $180^\circ - 100^\circ - 20^\circ = 60^\circ$.



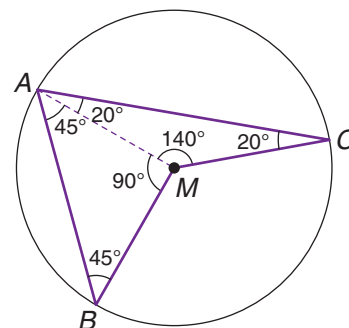
18 De rechterhoek bij B en de linkerhoek bij D zijn gelijke Z -hoeken, dus allebei 64° .
 Omdat driehoek BCD gelijkbenig is, is de hoek bij C ook 64° .
 Dan is de hoek bij D $180^\circ - 64^\circ - 64^\circ = 52^\circ$.

19 De hoeken bij A en bij C zijn 32° , de hoeken bij B en D zijn $(180^\circ - (2 \times 32^\circ)) : 2 = 58^\circ$.
 De hoeken bij S zijn $180^\circ - 32^\circ - 58^\circ = 90^\circ$.

Toets – hoeken

1 De hoek tegenover het vraagteken is $180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$. Omdat deze driehoek gelijkbenig is, is de tegenoverliggende zijde ook even lang als de rode lijnstukken. De bovenste driehoek is dus (toevallig) ook gelijkbenig, de andere beide hoeken zijn 70° en $180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$.
 $? = 40^\circ$. (3 punten)

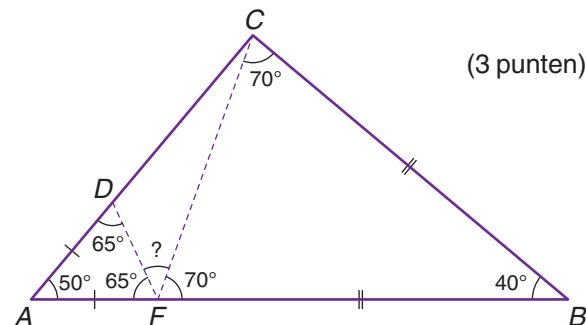
2 Er staan twee gelijkbenige driehoeken in de cirkel, want $MA = MB = MC$ zijn stralen van de cirkel.
 De hoek bij A is $45^\circ + 20^\circ = 65^\circ$.



(3 punten)

- 3** Omdat driehoek CBF gelijkbenig is, zijn de hoeken bij C en F 70° .
Omdat driehoek FAD gelijkbenig is, zijn de hoeken bij D en F 65° .
De hoek met het vraagteken is $180^\circ - 70^\circ - 65^\circ = 45^\circ$.

Maximumscore is 10. Trek punten af voor foute antwoorden.



Driehoeken en cirkels

- 1**
- a** De oppervlakte is: $\frac{1}{2} \times 20 \times 24 = 240 \text{ cm}^2$.
 - b** De rechterhoek bij D is $180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$.
De linkerhoek bij D is $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. De linkerhoek bij F is $180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.
- 2** Alle driehoeken hebben dezelfde hoogte (4 cm) en dezelfde basis (7 cm).
Daarom hebben ze allemaal de oppervlakte $\frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14 \text{ cm}^2$.
- 3**
- a** $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9 \text{ cm}^2$ (of als twee halve rechthoeken: $\frac{1}{2} \times 3 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = 7,5 + 1,5 = 9 \text{ cm}^2$)
 - b** $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10 \text{ cm}^2$ (of als twee halve rechthoeken: $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 6 + 4 = 10 \text{ cm}^2$)
 - c** $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \text{ cm}^2$ of $4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 16 - 8 - 2 = 6 \text{ cm}^2$
 - d** $7 \times 5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 - \frac{1}{2} \times 6 \times 3 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 35 - 2 - 9 - 2 - 3 = 19 \text{ cm}^2$
 - e** $2 \times 3 \times 3 = 18 \text{ cm}^2$
 - f** $5 \times 6 - \frac{1}{2} \times 5 \times 1 - \frac{1}{2} \times 5 \times 2 - \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 30 - 2,5 - 5 - 9 = 13,5 \text{ cm}^2$
 - g** $2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 4 - \frac{1}{2} - 1 - 1 = 1\frac{1}{2} \text{ cm}^2$
 - h** $8 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 24 - 3 - 6 = 15 \text{ cm}^2$
 - i** $8 \times 5 - 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 7 - \frac{1}{2} \times 1 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 7 = 40 - 2 - 3 - 2 - 3,5 - 2 - 3,5 = 24 \text{ cm}^2$

4 $4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 16 - 1,5 - 4 - 4 - 0,5 = 6 \text{ cm}^2$

5 $2 \approx 2 \times 3,14 = 6,28$ dus $2r \approx 6,28 \times 915 = 5.749 \text{ cm}$ (≈ 57 meter).

- 6 a $40.000 : (2) = 6.366 \text{ km}$ (ongeveer)
 b De straal van de touwcirkel is 1 meter meer dan die van de aarde.
 De omtrek wordt $1 \times 2r \approx 6,28$ meter meer dan die van de aarde.

7 De omtrek is $2 \times$ de straal of $\times$ de diameter. Hier: $\pi \times 70 \text{ cm} \approx 220 \text{ cm}$.

8 $\pi \times 120 \approx 377 \text{ mm}$

- 9 Het donkere driehoekje is een kwart vierkantje ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1$).
 Begin de vierkantjes te tellen vanaf de middellijn, naar boven toe en tel de uitkomsten per rij op.
 De oppervlakte van de helft van de cirkel is dan ongeveer
 $10 + 9 \frac{2}{3} + 8 \frac{1}{2} + 7 + 4 = 39 \frac{1}{6} \approx 39,2 \text{ cm}^2$.
 De oppervlakte van de hele cirkel is ongeveer $2 \times 39,2 = 78,4 \text{ cm}^2$.

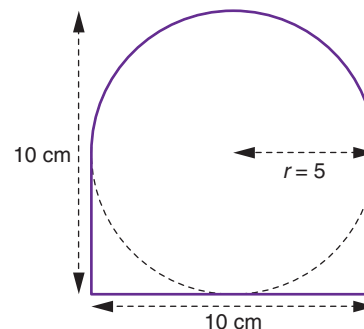
10 Het verschil is $78,5 - 78,4 = 0,1 \text{ cm}^2$.

11 De omtrek is ongeveer 314 cm en de oppervlakte is $(\frac{1}{2})^2 \pi = \frac{1}{4} \pi \approx 0,7854 \text{ m}^2 = 7.854 \text{ cm}^2$ (of: $\pi \times 50^2$).

12 De omtrek $= 30 \pi \approx 94 \text{ cm}$ en de oppervlakte $= 15^2 \pi \approx 225 \times 3,14 \approx 707 \text{ cm}^2$.

13 De diameter $= \frac{20}{\pi} \approx 6,366 \text{ cm}$ dus de straal is $6,366 : 2 = 3,183 \text{ cm}$ en de oppervlakte $\approx 10,13 \times 3,14 \approx 32 \text{ cm}^2$.

- 14 De figuur is een rechthoek van 10×5 plus een halve cirkel met een straal van 5.
 De oppervlakte van de rechthoek is $10 \times 5 = 50 \text{ cm}^2$.
 De oppervlakte van de halve cirkel is $3,14 \times 25 : 2 = 39,25 \text{ cm}^2$.
 De oppervlakte van de totale figuur $\approx 50 + 39,25 = 89,25 \text{ cm}^2$.
 De omtrek van de halve cirkel $\approx 3,14 \times 5 = 15,7 \text{ cm}$.
 De omtrek van de hele figuur $\approx 10 + 5 + 5 + 15,7 = 35,7 \text{ cm}$.

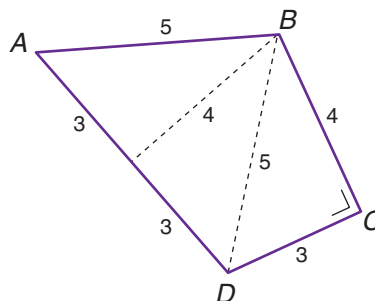


- 15** De lange zijden van de vlieger kun je berekenen met de stelling van Pythagoras. $2^2 + 3^2 = x^2$. De zijde is $\sqrt{13} \approx 3,61$.
 De korte zijden van de vlieger zijn $\sqrt{(1^2 + 2^2)} = \sqrt{5} \approx 2,24$.
 De omtrek is $2 \times 3,61 + 2 \times 2,24 = 7,22 + 4,48 = 11,7$
 of: de omtrek is $2 \times \sqrt{5} + 2 \times \sqrt{13} = 11,68$.

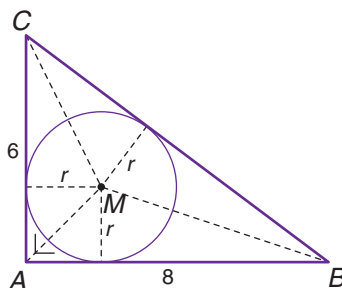
De oppervlakte is $4 \times 4 - 2 \times 3 - 1 \times 2 = 16 - 6 - 2 = 8 \text{ cm}^2$.

- 16** r^2 is $\frac{7.854}{\pi} \approx 2.500 \text{ cm}^2$ dus $r = 50 \text{ cm}$ en de omtrek $= 2r \approx 100 \times 3,14 = 314 \text{ cm}$.

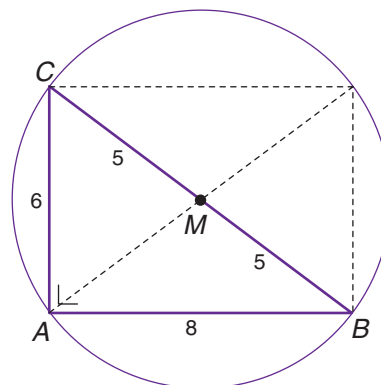
- 17** Trek de lijn BD , die is $\sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25} = 5$ (Pythagoras).
 $\triangle ABD$ is dus gelijkbenig.
 De oppervlakte van $\triangle ABD$ is $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$.
 De oppervlakte van $\triangle BCD$ is $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.
 De oppervlakte van $ABCD$ is $12 + 6 = 18$.



- 18** Zijde $BC = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = \sqrt{100} = 10$
 Opp. $\triangle AMB = \frac{1}{2} \times 8 \times r = 4r$
 Opp. $\triangle AMC = \frac{1}{2} \times 6 \times r = 3r$
 Opp. $\triangle CMB = \frac{1}{2} \times 10 \times r = 5r$
 ————— +
 Opp. $\triangle ABC = 12r = 24$ Dus $r = 2$.



- 19** Driehoek ABC is een halve rechthoek.
 Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de diagonalen van die rechthoek.
 De diagonaal $= \sqrt{(6^2 + 8^2)} = \sqrt{100} = 10$,
 dus de straal van de cirkel is 5.
 De oppervlakte van de omgeschreven cirkel is $25 \pi \approx 78,5$.



Toets – driehoeken en cirkels

- 1** De oppervlakte van het vierkant is 16 cm^2 .
De oppervlakte van de cirkel is $2^2 \pi = 4\pi$.
De oppervlakte van het puntje is $(16 - 4\pi) : 4 = 4 - \pi \text{ cm}^2$.
De omtrek van de cirkel is $2 \times 2 \times \pi = 4\pi$.
De omtrek van het puntje is halve zijde + halve zijde + $\frac{1}{4}$ cirkel = $2 + 2 + \pi = 4 + \pi \text{ cm}$. (3 punten)
- 2** De zijden van het vierkant zijn $\sqrt{(2^2 + 2^2)} = \sqrt{8}$.
De oppervlakte van het vierkant is $\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8 \text{ cm}^2$.
De oppervlakte van de cirkel is $2^2 \pi = 4\pi \text{ cm}^2$.
De oppervlakte van 1 segment is $(4\pi - 8) : 4 = \pi - 2 \text{ cm}^2$.
De omtrek van de cirkel is $4\pi \text{ cm}$.
De omtrek van het segment is 1 zijde + $\frac{1}{4}$ cirkel = $\sqrt{8} + \pi \text{ cm}$. (3 punten)
- 3** Zie figuur B als een halve grote cirkel + 4 halve kleine cirkels. De grote cirkel heeft een middellijn 4 en de kleine cirkelboog heeft een middellijn 1. Elke halve cirkel heeft een omtrek van $\frac{1}{2} \times 2 \times \pi \times r = \pi$.
Figuur A heeft een omtrek 8π en figuur B heeft als omtrek $4\pi + 4 \times \pi$ en dat is gelijk aan elkaar.
De omtrek van A en B is even groot. (3 punten)

Maximumscore is 10. Trek punten af voor foute antwoorden.

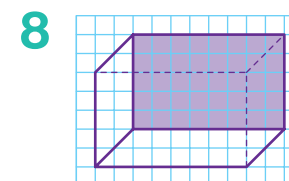
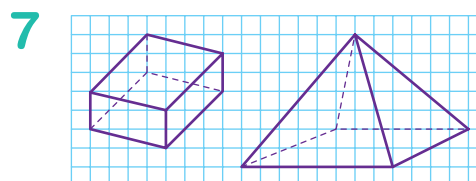
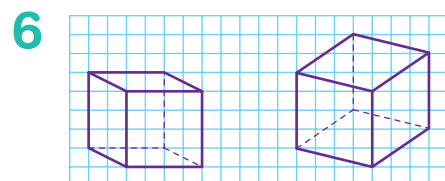
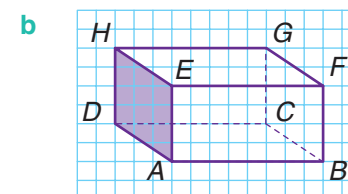
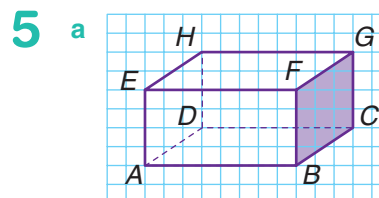
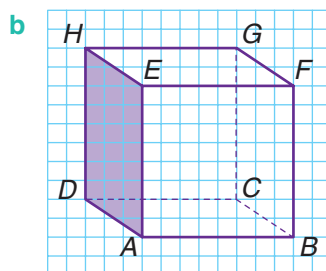
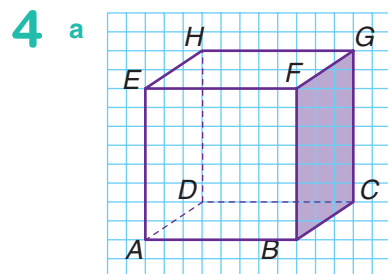
Meetkunde in de ruimte

- 1** $P(3, 0, 3)$ $Q(3, 6, 3)$ $R(3, 3, 6)$ $S(1\frac{1}{2}, 6, 4\frac{1}{2})$
- 2 a** $A(0, 0, 0)$ $B(4, 0, 0)$ $C(4, 10, 0)$ $D(0, 10, 0)$ **b** $S(2, 5, 6)$
 $E(0, 0, 6)$ $F(4, 0, 6)$ $G(4, 10, 6)$ $H(0, 10, 6)$

3 a $BC = \sqrt{(3^2 + 2^2)} = \sqrt{(9 + 4)} = \sqrt{13} \approx 3,61$

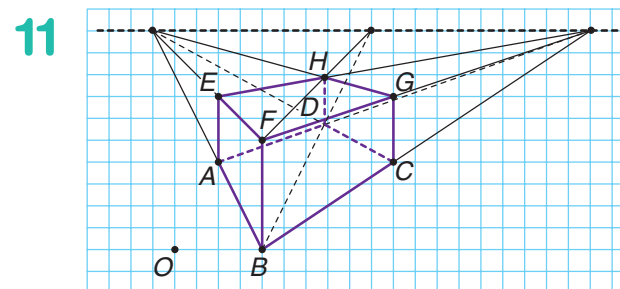
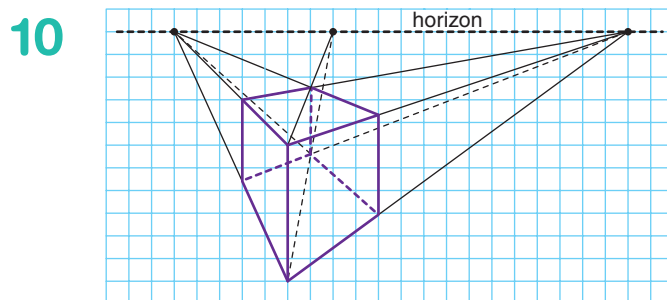
b $BE = DE = \sqrt{(6^2 + 6^2)} = \sqrt{72} \approx 8,49$

op papier: $BE = 8,49$ en $DE = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$



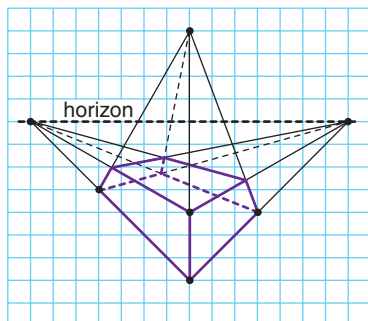
- 9 a EH en AB zijn kruisend.
 EH en EB zijn snijdend.
 EB en HC zijn evenwijdig.
 EB en HF zijn kruisend.
 HB en EC zijn snijdend.

- b DE en HF zijn kruisend.
 DG en AF zijn evenwijdig.
 GC en AF zijn kruisend.
 AD en FE zijn kruisend.
 NM en FE zijn snijdend (snijpunt buiten kubus).



De verdwijnpunten zijn $(-1, 10)$, $(9, 10)$ en $(19, 10)$.

12



13

De lengte en breedte van het grondvlak van de kleine piramide is $12 : 2 = 6$

Oppervlakte grote piramide: $\frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times 10 = 480 \text{ cm}^3$

Oppervlakte kleine piramide (boven): $\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$

af trekken

Oppervlakte afgeknotten piramide: 420 cm^3

14

a $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 3.000 \text{ cm}^3$

b Het grondvlak is een rechthoekige driehoek met een oppervlakte van $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \text{ cm}^2$.

De inhoud van het prisma is $10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^3$.

c De straal van het grondvlak is 10 cm .

Het volume van de buis (cilinder) is $10^2 \times \pi \times 200 = 100 \times \pi \times 200 = 62.800 \text{ cm}^3$.

d Eerst moet de straal r (van de aarde) berekend worden:

$r = 40.000 / (2 \pi)$, dus $r = 6.366 \text{ km} = 6,366 \times 10^3 \text{ km}$.

Volume aarde = $\frac{4}{3} \pi \times 6,366^3 \times (10^3)^3 = 1,08 \times 10^{12} \text{ km}^3$

e De straal van het grondvlak is $10 : 2 = 5$.

De inhoud van de kegel is $(\frac{1}{3}) \times \pi \times 5^2 \times 10 \approx 262 \text{ cm}^3$.

15

Het grondvlak van de piramide is $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} : 2 = 18 \text{ cm}^2$; de hoogte is 6 cm .

De Inhoud is $\frac{1}{3} \times 18 \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^3$ De punt is $\frac{1}{6}$ deel van de kubus.

16

De hoogte van een punt van de balk is $10 : 2 = 5$.

De oppervlakte van het grondvlak van een punt van de balk is $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.

De inhoud van een punt van de balk is $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 5 = 10 \text{ dm}^3$.

De balk heeft een inhoud van $3 \text{ dm} \times 4 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} = 120 \text{ dm}^3$.

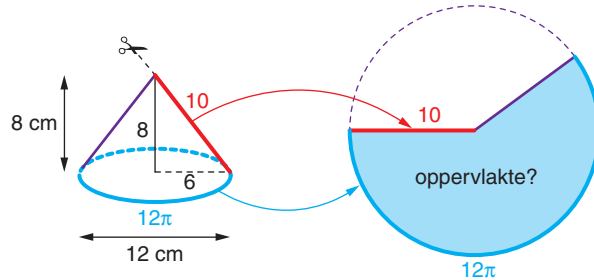
De inhoud van het blok is $120 \text{ dm}^3 - 20 \text{ dm}^3 = 100 \text{ dm}^3$.

17

De lengte van de strook is gelijk aan de omtrek van de cirkel. De omtrek van de cirkel is $\pi \times 20 \approx 62,8$.

De oppervlakte van de mantel is ongeveer $10 \times 62,8 = 628 \text{ cm}^2$. Ineens: $10 \times \pi \times 20 \approx 628 \text{ cm}^2$.

18



- a $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm
 b 12π
 c De *omtrek* van de blauwe cirkel is 12π (want de straal ervan is 6).
 De *omtrek* van de grote cirkel rechts is 20π (want de straal ervan is 10).
 De oppervlakte van de totale grote cirkel rechts is $\pi \times 10^2 = 100\pi$.
 De oppervlakte van het gekleurde cirkeldeel en de totale cirkeloppervlakte verhouden zich net zo als de omtrek daarvan.
 De oppervlakte van het gekleurde gedeelte : $100\pi = 12\pi : 20\pi$.
 De (gekleurde) *oppervlakte* van de kegelmantel is
 $\frac{12\pi}{20\pi} \times 100\pi = 60\pi \text{ cm}^2 (\approx 188 \text{ cm}^2)$.

Toets – meetkunde in de ruimte

- 1 AH en BG zijn evenwijdig.
 BG en DS zijn kruisend.
 DS en BF zijn snijdend.
 DS en CG zijn kruisend.
 AG en DS zijn kruisend. (5 punten)
- 2 $M(6, 5, 12)$ $N(3, 10, 12)$ $S(6, 7\frac{1}{2}, 6)$ (3 punten)
- 3 $G = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$, $h = 10$ $\frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} \times 12 \times 10 = 40$ (2 punten)